



(códigos QR para acceder directamente a los vídeos)



# GEOMETRÍA<sup>1</sup>

PRIMARIA

1º ESO

2º ESO

3º ESO aplicadas

3º ESO académicas

4º ESO aplicadas

4º ESO académicas

## CALCULADORA

Se recomienda que todos los alumnos adquieran una calculadora que facilite las explicaciones en clase y que les valga para todo su paso por la Enseñanza Secundaria. La propuesta es la calculadora Casio fx-991SP u otra de similares prestaciones y manejo.

<sup>1</sup> Traducciones al inglés hechas por: Gema Bargueño Alonso y Elia Pérez González-Corroto.



ÍNDICE:

I. GEOMETRÍA.....3

    SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDAS.....3

    LUGARES GEOMÉTRICOS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO .....5

    ÁNGULOS Y SEGMENTOS .....15

    POLÍGONOS Y CIRCUNFERENCIAS.....15

    PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA (TALES) .....54

    SEMEJANZAS. MOVIMIENTOS. VECTORES .....66

    POLIEDROS Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN .....80

    COORDENADAS GEOGRÁFICAS.....96

    TRIGONOMETRÍA .....106

    COORDENADAS POLARES .....118



# I. GEOMETRÍA

## SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDAS

1. 4,56 dm = pasar a cm
2. 9,55 km = pasar a dm
3. 34,5 dam = pasar a cm
4. 12,3 km = pasar a cm
5. 34,56 km = pasar a mm
6. 3,45 dam = pasar a cm
7. 2,34 dm = pasar a m
8. 98,5 dam = pasar a cm
9. 23,45 hm = pasar a km
10. 45,6 dm = pasar a mm
11. 23,45 dm = pasar a dam
12. 1,23 hm = pasar a cm
13. 45 km + 23,7 dam = pasar a m
14. 345,6 km + 5678,5 dam = pasar a hm
15. 8 mm + 23,8 dm = pasar a cm
16. 987 m + 4,567 dm = pasar a mm
17. 2,3 dag + 235,5 g = pasar a dg
18. 23,4 hg + 2 dag = pasar a g
19. 4,567 kg + 33,5 dag = pasar a dg
20. 34,5 cg + 9 mg = pasar a dg
21. 56,6 cl + 342,4 dal = pasar a dl

22. 4,56 dl + 9 ml = pasar a cl
23. Dos medios litros. ¿Cuántos litros son?
24. Cuatro medios litros. ¿Cuántos litros son?
25. Ocho medios litros. ¿Cuántos litros son?
26. Diez medios litros. ¿Cuántos litros son?
27. 4521 mm<sup>2</sup> = pasar a m<sup>2</sup>
28. 30,5 cm<sup>2</sup> = pasar a dm<sup>2</sup>
29. 0,5 m<sup>2</sup> = pasar a dam<sup>2</sup>
30. 120 dm<sup>2</sup> = pasar a cm<sup>2</sup>
31. 63 hm<sup>2</sup> + 9,567 m<sup>2</sup> = pasar a dam<sup>2</sup>
32. 34,56 cm<sup>2</sup> + 24 mm<sup>2</sup> = pasar a dm<sup>2</sup>
33. 2,34 dam<sup>2</sup> + 3,456 km<sup>2</sup> = pasar a m<sup>2</sup>
34. 12 hm<sup>2</sup> + 34,59 m<sup>2</sup> = pasar a dam<sup>2</sup>
35. 123 dam<sup>2</sup> + 3 km<sup>2</sup> = pasar a hm<sup>2</sup>
36. 356,78 dam<sup>2</sup> + 3,26 m<sup>2</sup> = pasar a hm<sup>2</sup>
37. 500 m<sup>2</sup> + 2,45 cm<sup>2</sup> = pasar a dm<sup>2</sup>
38. 9,56 cm<sup>2</sup> + 23,56 m<sup>2</sup> = pasar a mm<sup>2</sup>
39. 2,6 dam<sup>2</sup> + 1,234 km<sup>2</sup> = pasar a hm<sup>2</sup>
40. 6 cm<sup>3</sup> + 8 m<sup>3</sup> = pasar a dm<sup>3</sup>
41. 8 dam<sup>3</sup> + 345 dm<sup>3</sup> = pasar a m<sup>3</sup>
42. 6 cm<sup>3</sup> + 9 dm<sup>3</sup> = pasar a mm<sup>3</sup>
43. 2 hm<sup>3</sup> + 133,5 m<sup>3</sup> = pasar a dam<sup>3</sup>
44. 445 dm<sup>3</sup> + 188 m<sup>3</sup> = pasar a m<sup>3</sup>
45. 0,004 hm<sup>3</sup> + 1234,5 dm<sup>3</sup> = pasar a dam<sup>3</sup>



46.  $9,6 \text{ dam}^3 + 23 \text{ cm}^3 = \text{pasar a m}^3$
47.  $14 \text{ dm}^3 + 987,456 \text{ mm}^3 = \text{pasar a dm}^3$
48.  $86 \text{ dam}^3 + 158 \text{ dm}^3 = \text{pasar a m}^3$
49.  $1964 \text{ mm}^3 + 0,0045 \text{ m}^3 = \text{pasar a dm}^3$
50.  $56.100'' = \text{pasar a grados, minutos y segundos}$
51.  $75.200'' = \text{pasar a grados, minutos y segundos}$
52.  $29.420'' = \text{pasar a grados, minutos y segundos}$
53.  $8.692'' = \text{pasar a grados, minutos y segundos}$
54.  $61.200'' = \text{pasar a grados, minutos y segundos}$
55.  $18^\circ 19' 22'' + 18^\circ 16' 21''$
56.  $17^\circ 18' 31'' + 17^\circ 13' 21''$
57.  $18^\circ 29' 38'' + 22^\circ 55' 35''$
58.  $56^\circ 29' 35'' - 29^\circ 16' 24''$
59.  $15^\circ 27' 33'' - 12^\circ 12' 14''$
60.  $45^\circ - 21^\circ 19' 55''$
61.  $46^\circ 29' 27'' - 46^\circ 29' 18''$
62.  $19^\circ 21' 23'' \times 2$
63.  $07^\circ 02' 12'' \times 4$
64.  $12^\circ 18' 39'' : 5$
65.  $39^\circ 12' 25'' : 6$
66.  $19^\circ 21' 41'' : 3$

#### PROBLEMAS

##### (dos-tres operaciones y divisiones por una cifra)

67. La hormiga Lolita sale de su hormiguero y, después de andar 10cm, coge una pajita y la lleva de vuelta a casa. Sale una vez más y, tras recorrer 15cm, ve un granito de maíz que carga de nuevo hasta el hormiguero. ¿Cuántos metros ha andado en total Lolita?
68. Una tienda de chuches quiere atar sus bolsas con un cordoncito de 12cm. ¿Cuánto cordón gastará para atar 5 bolsas? ¿Y para atar 310 bolsas? ¿Cuántos metros es eso?

69. Para merendar he comprado un paquete de 36gr de lacasitos. Si nos lo repartimos entre 4 amigas, ¿cuántos gramos de lacasitos nos comeremos cada una? ¿Y si somos 9 amigas? ¿Cuántos decigramos es eso?
70. Con una cantimplora de 5dl lleno un bebedero de 2 litros de capacidad. ¿Cuántos viajes me he dado a la fuente?
71. ¿Cuántas baldosas necesitaremos para cubrir un patio de  $15\text{m}^2$  si la superficie de cada baldosa es de  $2\text{dm}^2$ ?

#### PROBLEMAS

##### (tres-cuatro operaciones, multiplicativos, partitivos y divisiones)

72. Piolín tiene sed y se lanza en plancha a beber de un vaso de agua encima de la mesa. Si el vaso contiene un cuarto de litro de líquido y Piolín, después de beber, ha dejado solo 190ml, ¿cuánto ha bebido Piolín?
73. Un rollo de cuerda mide 75m ¿Cuántos rollos se necesitan para delimitar una finca poligonal de perímetro 250dam?
74. María mide 1,57m y su hermano José 1,72m. ¿Quién es más alto? ¿Cuántos centímetros de diferencia hay entre los dos?
75. Luis hace tres excursiones en bicicleta: el primer día recorre 42.000m; el segundo día hace 23,4dam; el tercer día 23,450m. ¿Cuántos kilómetros ha hecho en total?
76. Un carpintero tiene 5 tablones de 3m que quiere partir en trozos de 75cm. ¿Cuántos trozos conseguirá?
77. Para limpiar una playa de 4,5km se contratan los servicios de tres máquinas. ¿Cuántos metros barrerá cada una si se reparten el trabajo a partes iguales?
78. Una tienda quiere poner lazos a los paquetes para las fiestas. Se calcula que cada lazo se lleva 60cm de cinta. ¿Cuántos metros de cinta se necesitan para adornar 235 paquetes?
79. En un aserradero se han cortado 1.200 pinos de 2,15m cada uno. Colocados uno detrás de otro. ¿Cuántos kilómetros representarían?



80. Un carpintero tiene 6 listones: a) 40cm; b) 120mm; c) 0,3m; d) 13dm; e) 170mm; f) 0,2Dam. Si necesita cortar 1,5m. ¿Qué listón escogerá y cuánto le sobrará después de cortarlo?
81. Para llenar un recipiente de 4 litros de capacidad. ¿Cuántos cuartos de litro se necesitan?
82. Un bidón contiene 0,9hl de fanta y se quieren usar para llenar botellas de 1,5 litros cada una. ¿Cuántas botellas se necesitarán?
83. ¿Cuánto dinero ganaremos vendiendo, en botellas de medio litro,  $2,7m^3$  de horchata sabiendo que cada botella cuesta 0,25€?

#### LUGARES GEOMÉTRICOS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

##### RECUERDA LOS LUGARES GEOMÉTRICOS

@ Circunferencia: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado centro.

@ Mediatriz: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento.

@ Bisectriz: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan a los lados de un ángulo (es decir, que equidistan de dos semirrectas secantes dadas).

##### CIRCUNFERENCIA

84. Dibuja un punto en tu hoja y, con el compás, traza una circunferencia de radio 5cms y centro ese punto. Mide ahora la distancia desde ese centro a tres puntos distintos de la circunferencia trazada, ¿qué propiedad crees que define a la circunferencia?

*Draw a point on your paper sheet and, with the compass, draw a circumference of radius 5cm having as a centre the point already drawn. Now measure the distance from the centre to three different points of the drawn circumference, what property does the circumference have?*

85. Necesitas instalar una valla para proteger los exteriores de una casa. Quieres dejar un perímetro de seguridad de 14m alrededor de la vivienda. ¿Qué haces? Dibuja y comprueba la solución.

*You have to fence your house to protect it. You would like to leave a security perimeter of 14m around the house. What would you do? Draw it and check the solution.*

86. Un perro está atado a un poste con una cadena de 5m. ¿Por dónde no podrías pasar si no quieres correr el riesgo de que te alcance? Dibuja y comprueba la situación.

*A dog is tethered to a lamp post with a chain of 5m. If you do not want to get caught by the dog, which way wouldn't you go through? Draw it and check the situation.*

87. Un castillo tiene alrededor un foso de 3m de ancho relleno de agua. Dibuja la situación sabiendo que desde el centro del castillo al extremo exterior del foso siempre hay 17m. ¿Qué forma tiene el complejo?

*A castle is surrounded by a moat of 3m width. Draw the situation taking into account that from the centre of the castle to the exterior part of the moat there are always 17m. What's the shape of the complex?*

88. **El Señor de los Anillos:** Gwaihir el águila está atada a una correa de 100m y se encuentra descansando en su posadero. De repente un conejo llama su atención y se pone alerta. ¿En qué zona de acción debe entrar el conejo para que sea cazado por el águila? ¿Cómo se define geoméricamente lo que estás usando? Dibuja la situación-solución.

*Gwaihir, the Eagle, is tethered to a strap of 10m and it is resting on its perch. Suddenly a rabbit catches its attention and the Eagle is alert. Where would the rabbit have to be placed so the eagle can catch it? How can you geometrically define what you are using? Draw the situation - solution.*

##### MEDIATRIZ

##### PERPENDICULAR BISECTOR

89. Dibuja la mediatriz de un segmento que mide 10cm. ¿Cómo es esta nueva recta con respecto al segmento anterior? Elige un punto de la mediatriz y mide la distancia desde aquí hasta cada extremo del segmento, ¿cuánto vale? Elige otro punto y haz lo mismo, ¿qué obtienes? ¿Qué propiedad crees entonces que define a la mediatriz?



*Draw the perpendicular bisector of a line segment of 10cm. How is the new straight line in relation to the previous line segment? Choose a point in the perpendicular bisector and measure the distance from this point till each of the sides of the line segment, how many cm does it measure? Choose another point and do the same, what do you get? What is the property of the perpendicular bisector?*

90. Traza la mediatriz de un segmento de 15cm y comprueba su propiedad geométrica.

*Draw the perpendicular bisector of a line segment of 15cm and check its geometric property.*

91. Quieres dividir un segmento de 8,5cm en dos partes exactamente iguales. ¿Qué has dibujado para conseguirlo?

*Divide a line segment of 8.5cm into two equal parts. What have you drawn to do it?*

92. Divide un segmento de 12cm en dos partes exactamente iguales con regla y compás. ¿Cómo se llama lo que has dibujado para conseguirlo? ¿Qué propiedad geométrica tiene?

*Divide a line segment of 12cm into two equal parts using a ruler and a compass. What have you drawn to do it? What is its geometrical property?*

93. Las diagonales de un rombo se cortan en perpendicular por sus puntos medios. ¿Qué deberías trazar para dibujar uno a partir de ellas? Dibuja un rombo sabiendo que su diagonal menor mide 5cm y su diagonal mayor 11cm. ¿Cuánto miden sus lados?

*The diagonals of a rhombus are perpendicular and cut each other at the midpoint. What should you draw to get a rhombus using the diagonals? Draw a rhombus given that its minor diagonal measures 5cm and its major diagonal measures 11cm. What will its side lengths be?*

94. Recordarás de cursos pasados que la altura de un triángulo es una recta perpendicular a su base pasando por el vértice opuesto. En el caso del triángulo isósceles, además de ser perpendicular, la altura del lado desigual divide a este en dos partes iguales. ¿A qué te suena esto?

*You probably remember from previous years that the height of a triangle is the perpendicular from the base to the opposite vertex. In isosceles triangles, the height to the unequal side, apart from being perpendicular, divides this one into two equal parts. Does this remind you of anything?*

95. Dos ciudades A y B separadas por una carretera de 13km quieren construir una senda de paseo perpendicular a esa carretera. Las dos ciudades quieren estar a la misma distancia de la senda, puesto que la pagan a medias. ¿Cómo se debe construir? Dibuja y comprueba la solución.

*Two cities A and B which are separated by a 13km road want to build a path perpendicular to the road. The two cities want to be at the same distance from the path, as both pay half each. How should the road be built? Draw it and check the solution.*

96. Una barquita de 6m de eslora tiene el mástil clavado en la mitad de su casco. Si agarramos el mástil a los 2,5m de altura desde los extremos de la barca con cuerdas, ¿cuánta cuerda gastaremos? Dibuja la situación y mide con regla lo que se te pide.

*Translate.*

97. Tenemos dos listones de madera de 10cm con los que queremos construir una cruz perfecta. Explica paso a paso cómo hacerlo ¿Cómo se define geoméricamente el objeto matemático que debes emplear? Dibuja la situación-solución.

*Translate.*

### BISECTRIZ

98. Traza la bisectriz de un ángulo de 100°. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos nuevamente formados? Elige un punto de la bisectriz y levanta dos perpendiculares a cada uno de los lados del ángulo primero, ¿cuánto miden estos dos nuevos segmentos? Elige otro punto y haz lo mismo, ¿llegas a alguna conclusión? ¿Qué propiedad crees que define a la bisectriz?

99. Dibuja un ángulo de 70° y pártelo en dos ángulos iguales. ¿Cómo se llama la recta que lo divide en estas dos partes iguales?



100. De una rotonda salen dos carreteras que forman un ángulo de  $53^\circ$  con destino a dos institutos. A lo largo del recorrido, las paradas del autobús común se han de situar a la misma distancia de las dos carreteras que conducen a los centros. ¿Cómo lo harías? Dibuja y comprueba la solución.

*Two roads to two secondary schools forming an angle of  $53^\circ$  come out from a roundabout. During the travel, two bus stops should be placed at the same distance from the roads leading to both secondary schools. How would you do it? Draw it and check the solution.*

101. Desde la base de un teleférico se quieren mandar cabinas a tres puntos turísticos distintos que se van a construir en la roca: mirador Palos, mirador Real y mirador Alabastro. Por motivos de seguridad, los cables han de estar lo más separados posible unos de otros. Si el cable del mirador Palos se pondrá a  $107^\circ$  del cable del mirador Alabastro. ¿Cómo habrá que situar el cable del mirador Real? Dibuja y comprueba la solución.

*Cabins from the base of a cable railway want to be sent to three different tourist places that will be built in the rock: viewpoint Palos, viewpoint Real and viewpoint Alabastro. For security reasons, the cables should be as separated as possible one from another. If the cable of the viewpoint Palos is set at  $107^\circ$  from the cable of the viewpoint Alabastro. Where should the cable of the viewpoint Real be set? Draw and check the solution.*

102. Te han dado una ración de tarta circular de  $120^\circ$  y necesitas dividirla en dos partes iguales para compartirla. ¿Cómo lo haces? Dibuja y comprueba la solución.
- You have been given a portion of a circular cake of  $120^\circ$  and you need to divide it into two equal parts to be shared. How are you going to divide it? Draw it and check the solution.*

### MEZCLADOS

103. Un preso de la Edad Media fue condenado a deambular solo el resto de su vida entre dos ciudades con la condición de permanecer siempre a la misma distancia de ambas. Dibuja la situación y explica la solución. ¿Cómo se define geométricamente lo que estás usando?

*Translate.*

104. Una parcela con forma de sector circular de  $73^\circ$  y radio 120m está destinada a dividirse en dos partes exactamente iguales para construir un edificio moderno junto a un jardín minimalista. Dibuja la situación y explica la solución. ¿Cómo se define geométricamente lo que estás usando?

*Translate.*

105. El espacio aéreo de una ciudad comprende el área que resulta de alejarse en todas direcciones 7km desde su centro geográfico. ¿Qué zona es esa? ¿Cómo se define geométricamente lo que estás usando? Dibuja la situación-solución.

*Translate.*

### LUGARES GEOMÉTRICOS RECUERDA

@ Circunferencia: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado centro.

@ Mediatriz: es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento. En los polígonos cíclicos<sup>2</sup>, las mediatrices de sus lados se cortan en un punto llamado circuncentro (o "centro"), centro de la circunferencia circunscrita. El circuncentro es, por tanto, el punto del plano que equidista de los vértices de un polígono cíclico.

<sup>2</sup> Polígono cíclico es aquel cuyos vértices se encuentran todos en el mismo círculo. Todos los triángulos, todos los rectángulos y todos los polígonos regulares son

cíclicos. También son cíclicos los cuadriláteros convexos cuyos ángulos opuestos son suplementarios (suman  $180^\circ$ ) => por lo tanto, ningún rombo es cíclico y, por ejemplo, todos los trapecios isósceles sí lo son.





**@ Bisectriz:** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo (es decir, que equidistan de dos semirrectas secantes dadas). Las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un punto llamado incentro, centro de la circunferencia inscrita. El incentro, por tanto, es el punto del plano que equidista de los lados de un triángulo.

**INTRODUCCIÓN.** Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca  $\Rightarrow$  1ª ¿Qué tienen que ver (matemáticamente hablando) un queso de tetilla, el faro de un coche, un anillo, el balón de rugby y un cometa? 2ª ¿Qué tienen en común, matemáticamente hablando, los dinosaurios, los esquimales, los huevos, los trenes y Gaudí? 3ª ¿Cuál es el mejor sitio para sentarse en el cine?



### CÓNICAS Y ARCO CAPAZ...

106. **Elipse.** Dibuja con un cordón cualquiera un lugar geométrico en el plano de la siguiente forma: coloca separados dos dedos de una mano; sujeta en cada dedo una punta de la cuerda; tensa la cuerda con un lápiz y pinta la figura resultante de desplazar el lápiz por la cuerda tensada. ¿Qué has conseguido? Busca en internet las propiedades de este lugar geométrico y encuentra para qué se utiliza. Recuerda: la elipse es una cónica, como también lo son la circunferencia, la parábola y la hipérbola.

107. **Arco capaz** de ángulo  $\alpha$  de un segmento AB. Sigue las instrucciones siguientes para dibujar el arco capaz de  $\alpha = 42^\circ$  de un segmento AB de 10cm: traza el segmento de 10cm; desde el extremo

A dibuja un ángulo de  $90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$ ; traza la mediatriz del segmento AB; señala el punto de corte O de la mediatriz con el lado del ángulo de  $48^\circ$ ; traza el arco de circunferencia con centro en O, radio OA y cuerda AB. Dibuja el triángulo OAB y mide todos sus ángulos. Señala un punto cualquiera P del arco capaz recién hallado y dibuja el triángulo PAB. Mide el ángulo en el vértice P. Señala otro punto cualquiera P' del arco capaz recién hallado y dibuja el triángulo P'AB. Mide el ángulo en el vértice P'. ¿Cuál crees que es la definición de este lugar geométrico? ¿Para qué crees que puede ser útil el arco capaz?

**RECUERDA:** el arco capaz es el lugar geométrico de los puntos del plano que ven a los extremos de un segmento AB con el mismo ángulo  $\alpha$ .

108. Sigue las instrucciones a continuación: traza el segmento AB de 13cm; desde el extremo A dibuja un ángulo de  $55^\circ (= 90^\circ - 35^\circ)$ ; traza la mediatriz del segmento AB; señala el punto de corte O de la mediatriz con el lado del ángulo de  $55^\circ$ ; traza el arco de circunferencia con centro en O, radio OA y cuerda AB. Dibuja el triángulo OAB y mide todos sus ángulos. Señala un punto cualquiera P del arco capaz recién hallado y dibuja el triángulo PAB. Mide el ángulo en el vértice P.

109. Dibuja el arco capaz de  $\alpha = 65^\circ$  correspondiente a un segmento de 10cm. Comprueba el resultado.

110. Dibuja el arco capaz de  $\alpha = 27^\circ$  correspondiente a un segmento de 6cm. Comprueba el resultado.

111. Dibuja el arco capaz de  $\alpha = 78^\circ$  correspondiente a un segmento de 8cm. Comprueba el resultado.

112. Dibuja el arco capaz de  $\alpha = 80^\circ$  correspondiente a un segmento de 7cm. Comprueba el resultado.

113. Dibuja el arco capaz de  $\alpha = 90^\circ$  correspondiente a un segmento de 4cm. ¿Qué notas de especial en este caso?

### RECUERDA

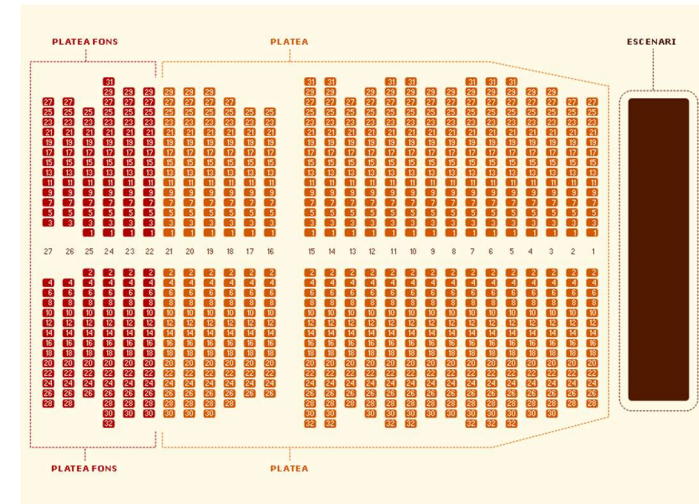
Ángulos complementarios  $\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

Ángulos suplementarios  $\Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$





114. Dibuja el arco capaz de  $\alpha = 70^\circ$  correspondiente a un segmento AB de 8cm. Traza ahora el arco menor (para completar la circunferencia de radio OA). Elige un punto P del arco capaz y un punto Q del arco menor (cualesquiera). Traza los triángulos PAB y QAB. Mide los ángulos interiores. ¿Qué observas?
115. Dibuja el arco capaz de  $\alpha = 115^\circ$  correspondiente a un segmento de 9cm. Nota: dibuja primero el arco capaz del ángulo suplementario y traza luego el arco menor resultante.
116. Dibuja el arco capaz de  $\alpha = 140^\circ$  correspondiente a un segmento de 10cm. Comprueba el resultado. Nota: ayúdate del ángulo suplementario y del arco menor.
117. Dibuja el arco capaz de  $\alpha = 130^\circ$  correspondiente a un segmento de 11cm. Comprueba el resultado. Nota: ayúdate del ángulo suplementario y del arco menor.
118. En el siguiente teatro (el escenario está representado por la barra de la derecha) hay dos precios para las localidades: más caro para las naranjas y más barato para las rojas. ¿Ven todos los espectadores en butacas naranjas el escenario con el mismo ángulo? ¿Y los espectadores en butacas rojas? Si yo quiero sentarme en una butaca para ver el escenario con  $70^\circ$ , ¿cuáles podrían ser mis localidades?



119. ¿Qué opciones tengo para comprar localidades si quiero ver el escenario con un ángulo de  $120^\circ$ ?



120. Investiga cómo dibujar una **hipérbola** con regla y compás. ¿Qué propiedad define a este lugar geométrico? ¿Dónde podemos encontrarlo en la naturaleza (pista: cometas, sombra)?
121. A lo mejor no sabes que la **parábola** es otro lugar geométrico. Busca qué propiedad la define como tal y sus usos en la técnica.
122. Las **gráficas de las funciones** también son lugares geométricos. Dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen la siguiente condición: la coordenada vertical siempre es el doble que la coordenada horizontal. ¿Cuál es la fórmula de esta función? Nota: se toma un sistema de coordenadas perpendiculares.

**GEOGEBRA:** entra en la página web siguiente y aprende las rectas y puntos notables del triángulo a través del software matemático geogebra.

[http://geogebra.geometriadinamica.org/ventana\\_rectas\\_notables.html](http://geogebra.geometriadinamica.org/ventana_rectas_notables.html)

**MEDIATRIZ**

**(triángulos)**

123. Dibuja con reglas y compás un triángulo de lados  $a=1,3\text{dm}$ ,  $b=9\text{cm}$  y  $c=100\text{mm}$ . ¿Cómo se llama este triángulo respecto a sus lados? ¿Y respecto a sus ángulos? Traza una de las tres mediatrices de uno de los tres lados de este triángulo. Elige un punto de la mediatriz y mide la distancia desde aquí hasta cada extremo del lado escogido, ¿cuánto vale? Elige otro punto y haz lo mismo, ¿qué propiedad crees entonces que define a la mediatriz que ya viste en 1º de ESO? Halla las otras dos mediatrices del triángulo. ¿Cómo se llama el punto de corte? ¿Qué significado crees que tiene? ¿Qué se puede dibujar por tanto?
124. Dibuja con regla y compás un triángulo de lados  $12\text{cm}$ ,  $80\text{mm}$  y  $10\text{cm}$ . ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos? Traza las tres mediatrices de sus lados y comprueba que se cumple la propiedad de lugar geométrico que estudiaste en 1º de ESO. Dibuja el punto de corte entre ellas. ¿Cómo se llama este punto? ¿Qué propiedad tiene? ¿Qué se puede dibujar por tanto?
125. Dibuja un triángulo isósceles con los lados iguales de  $12\text{cms}$  y los ángulos iguales de  $55^\circ$ . Traza la circunferencia circunscrita. ¿Cómo se llama el centro de esta circunferencia? ¿Qué has dibujado para hallarlo? ¿Por qué?
126. Dibuja un triángulo equilátero de lados  $13\text{cm}$ . Traza la circunferencia circunscrita. ¿Cómo se llama el centro de esta circunferencia? ¿Qué has dibujado para hallarlo? ¿Por qué?
127. Dibuja un triángulo rectángulo con catetos de  $4,5\text{cm}$  y  $60\text{mm}$ . Traza la circunferencia circunscrita. ¿Cómo se llama el centro de esta circunferencia? ¿Qué has dibujado para hallarlo? ¿Por qué?



128. Dibuja un triángulo obtusángulo de lados  $a=11\text{cm}$ ,  $b=13\text{cm}$  y ángulo  $\hat{C}=110^\circ$ . Traza el circuncentro y la circunferencia circunscrita.
129. Dibuja un triángulo acutángulo con las medidas de tu elección. Dibuja ahora el punto del plano que equidista de sus vértices.
130. Dibuja un triángulo rectángulo con las medidas de tu elección. Dibuja ahora el punto del plano que equidista de sus vértices.
131. Dibuja un triángulo obtusángulo con las medidas de tu elección. Dibuja ahora el punto del plano que equidista de sus vértices.

### MEDIATRIZ (polígonos cíclicos)

132. Dibuja un rectángulo cualquiera. Traza su circuncentro y la circunferencia circunscrita.
133. Dibuja un trapecio isósceles y, tras trazar su circuncentro, inscríbalo en una circunferencia.
134. Dibuja un pentágono regular de lado  $4\text{cm}$  de la siguiente manera: traza un segmento de  $4\text{cm}$  y añade a su derecha otro segmento de  $4\text{cm}$  haciendo un ángulo de  $108^\circ$  (con el transportador de ángulos); repite la operación tres veces más hasta cerrar el pentágono. Dibuja ahora la circunferencia circunscrita a este pentágono regular hallando el circuncentro de la figura.
135. Dibuja fielmente un trapecio isósceles de altura  $3\text{cm}$  y bases  $4\text{cm}$  y  $6\text{cm}$ . Dibuja el punto del plano que equidista de sus cuatro vértices. ¿Cómo se llama este punto? ¿Qué puedes decir de este polígono?
136. Dibuja un rectángulo con las medidas de tu elección. Dibuja ahora el punto del plano que equidista de sus vértices.
137. Dibuja un trapecio isósceles con las medidas de tu elección. Dibuja ahora el punto del plano que equidista de sus vértices.

### BISECTRIZ

138. Dibuja con regla y compás el triángulo de lados  $13\text{cm}$ ,  $1,5\text{dm}$  y  $90\text{mm}$ . ¿Qué nombre tiene respecto a sus lados? ¿Y respecto a sus ángulos? Traza una de las tres bisectrices de uno de los tres ángulos de este triángulo. Señala un punto de la bisectriz y levanta dos perpendiculares a cada uno de los lados del ángulo escogido, ¿cuánto miden estos dos nuevos segmentos? Elige otro punto y haz lo mismo, ¿qué propiedad crees que define a la bisectriz y que ya viste en 1º de ESO? Halla las otras dos bisectrices del triángulo. ¿Cómo se llama el punto de corte? ¿Qué significado crees que tiene? ¿Qué se puede dibujar por tanto?
139. Dibuja con reglas y compás el triángulo que tiene dos lados de  $12\text{cm}$ ,  $1,2\text{dm}$  y el ángulo comprendido entre ellos de  $50^\circ$ . ¿Qué nombre tiene respecto a sus lados? ¿Y respecto a sus ángulos? Traza una de las tres bisectrices de uno de los tres ángulos de este triángulo. Señala un punto de la bisectriz y levanta dos perpendiculares a cada uno de los lados del ángulo escogido, ¿cuánto miden estos dos nuevos segmentos? Elige otro punto y haz lo mismo, ¿qué propiedad crees que define a la bisectriz y que viste en 1º de ESO? Halla las otras dos bisectrices del triángulo. ¿Cómo se llama el punto de corte? ¿Qué significado crees que tiene? ¿Qué se puede dibujar por tanto?
140. Dibuja con regla y compás el triángulo de lados  $110\text{mm}$ ,  $11\text{cm}$  y  $1,1\text{dm}$ . ¿Qué nombre tiene respecto a sus lados? ¿Y respecto a sus ángulos? Traza una de las tres bisectrices de uno de los tres ángulos de este triángulo. Señala un punto de la bisectriz y levanta dos perpendiculares a cada uno de los lados del ángulo escogido, ¿cuánto miden estos dos nuevos segmentos? Elige otro punto y haz lo mismo, ¿qué propiedad crees que define a la bisectriz y que viste en 1º de ESO? Halla las otras dos bisectrices del triángulo. ¿Cómo se llama el punto de corte? ¿Qué significado crees que tiene? ¿Qué se puede dibujar por tanto?
141. Dibuja con regla y compás el triángulo de lados  $10\text{cm}$ ,  $0,8\text{dm}$  y  $50\text{mm}$ . ¿Qué nombre tiene respecto a sus lados? ¿Y respecto a sus ángulos? Traza la circunferencia inscrita a este triángulo. ¿Cómo se



llama el centro de esta circunferencia? ¿Qué has dibujado para hallarlo? ¿Por qué?

142. Tres segmentos cualesquiera cortándose dos a dos (formando un triángulo). Dibuja el punto del plano que equidista de esos cuatro segmentos. ¿Cómo se llama este punto?
143. Dibuja con regla y compás el triángulo de lados 6cm, 80mm y 1dm. ¿Qué nombre tiene respecto a sus lados? ¿Y respecto a sus ángulos? Traza la circunferencia inscrita a este triángulo. ¿Cómo se llama el centro de esta circunferencia? ¿Qué has dibujado para hallarlo? ¿Por qué?
144. Dibuja con regla y compás el triángulo de lados 9cm, 9cm y 5cm. ¿Qué nombre tiene respecto a sus lados? ¿Y respecto a sus ángulos? Traza la circunferencia inscrita a este triángulo. ¿Cómo se llama el centro de esta circunferencia? ¿Qué has dibujado para hallarlo? ¿Por qué?
145. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $b=7\text{cm}$ ,  $c=70\text{mm}$  y  $\hat{C}=45^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado  $a$  y los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos? Traza la circunferencia inscrita a este triángulo. ¿Cómo se llama el centro de esta circunferencia? ¿Qué has dibujado para hallarlo? ¿Por qué?
146. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $a=8\text{cm}$ ,  $c=80\text{mm}$  y  $\hat{C}=60^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado  $b$  y los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos? Traza la circunferencia inscrita a este triángulo. ¿Cómo se llama el centro de esta circunferencia? ¿Qué has dibujado para hallarlo? ¿Por qué?
147. Dibuja un triángulo acutángulo con las medidas de tu elección. Dibuja ahora el punto del plano que equidista de sus lados.
148. Dibuja un triángulo rectángulo con las medidas de tu elección. Dibuja ahora el punto del plano que equidista de sus lados.
149. Dibuja un triángulo obtusángulo con las medidas de tu elección. Dibuja ahora el punto del plano que equidista de sus lados.

### Más puntos notables del triángulo

#### MEDIANA

150. Dibuja con regla y compás el triángulo de lados 0,7dm, 11cm y 8cm. ¿Qué nombre tiene respecto a sus lados? ¿Y respecto a sus ángulos? Traza las tres medianas de este triángulo. ¿Cuánto miden cada una de ellas? ¿Cómo se llama el punto de corte entre ellas? Mide la distancia desde este punto a uno cualquiera de los vértices. ¿Qué fracción es respecto al total de su mediana? Haz lo mismo con las otras dos medianas ¿A qué conclusión llegas? ¿Qué significado físico tiene este punto de corte?
151. Dibuja con reglas y compás un triángulo equilátero de lados 85dm. Halla el baricentro. ¿Qué has trazado para conseguirlo? ¿Qué propiedad cumple este punto?
152. Dibuja con reglas y compás un triángulo de lado 9,5cm cuya mediana mide 7cm y está inclinada  $30^\circ$ . ¿Cuánto miden el resto de lados y ángulos?
153. Dibuja con reglas y compás un triángulo de lado 1,2dm cuya mediana mide 1dm y está inclinada  $80^\circ$ . ¿Cuánto miden el resto de lados y ángulos?
154. Dibuja con reglas y compás un triángulo de lado 7cm cuya mediana mide 150mm y está inclinada  $120^\circ$ . ¿Cuánto miden el resto de lados y ángulos?

#### ALTURA

155. Dibuja un triángulo acutángulo de lados  $a=115\text{mm}$ ,  $b=1\text{dm}$  y ángulo  $\hat{C}=85^\circ$ . Traza las tres alturas del triángulo y su punto de corte, ¿cómo se llama este punto?
156. Dibuja con reglas y compás un triángulo obtusángulo de lados  $a=9\text{cm}$ ,  $b=1,3\text{dm}$  y ángulo  $\hat{C}=100^\circ$ . Halla el ortocentro. ¿Qué diferencia ves con el ortocentro de un triángulo acutángulo?
157. Dibuja con reglas y compás un triángulo rectángulo con catetos de 3cm y 0,4dm. Halla el ortocentro. ¿Qué has dibujado para





trazarlo? ¿Qué diferencia ves con el ortocentro de un triángulo acutángulo u obtusángulo?

158. Calcula la distancia del ortocentro a los vértices de un triángulo de lados 6cm, 8cm y 10cm.

### RECUERDA

RECTAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

RECTA	PASA POR CADA VÉRTICE	PASA POR EL MITAD DEL LADO	PASA EN PERPENDICULAR	CORTE	PROPIEDAD DEL CORTE
BISECTRIZ	Sí	No necesariamente	No necesariamente	INCENTRO	Centro de circunferencia inscrita
MEDIATRIZ	No necesariamente	Sí	Sí	CIRCUNCENTRO	Centro de circunferencia circunscrita
MEDIANA	Sí	Sí	No necesariamente	BARICENTRO	El baricentro está a $\frac{2}{3}$ del vértice y a $\frac{1}{3}$ del lado
ALTURA	Sí	No necesariamente	Sí	ORTOCENTRO	---

CIRCUNCENTRO – BARICENTRO – ORTOCENTRO están alineados formando la RECTA DE EULER.

### RECUERDA:

@ El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita.  
 @ El incentro es el centro de la circunferencia inscrita.  
 @ El baricentro está a  $\frac{2}{3}$  del vértice y a  $\frac{1}{3}$  del lado.  
 @ En un triángulo equilátero, todas las rectas y puntos notables coinciden (circuncentro=incentro=baricentro=ortocentro) => consecuencia: cada uno de sus tres lados queda dividido a la mitad por su altura, generando dentro seis posibles triángulos rectángulos iguales.  
 @ En un triángulo isósceles, las rectas notables correspondientes al lado desigual coinciden => consecuencia1: el lado desigual queda dividido a la mitad por su altura, generando dentro dos triángulos rectángulos iguales; consecuencia2: la recta de Euler es la altura del lado desigual.  
 @ En un triángulo rectángulo, el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa y el ortocentro es el vértice del ángulo recto (porque dos de sus

alturas son los dos catetos) => consecuencia: la recta de Euler es la línea que une el vértice entre catetos con la mitad de la hipotenusa.

@ En los triángulos acutángulos, los puntos notables caen todos en el interior del triángulo.

@ En los triángulos obtusángulos, el ortocentro y el circuncentro caen fuera del triángulo.

### RECTA DE EULER

#### RECUERDA:

@ Si el triángulo es equilátero, no puede trazarse la recta de Euler porque el circuncentro, el baricentro y el ortocentro son el mismo punto.

@ Si el triángulo es isósceles, la recta de Euler es la altura (=mediana=mediatriz=bisectriz) sobre el lado desigual, por lo tanto, pasa además por el incentro.

@ Si el triángulo es rectángulo, la recta de Euler pasa por el vértice del ángulo recto (ortocentro) y el punto medio de la hipotenusa (circuncentro).

159. Dibuja con reglas y compás un triángulo de lados 12cm, 1dm y 0,9dm. ¿Qué nombre recibe este triángulo respecto a sus lados? ¿Y respecto a sus ángulos? Halla el incentro, circuncentro, baricentro y ortocentro, además de la circunferencia inscrita y circunscrita.

¿Cuáles de estos tres puntos están alineados? Traza la recta de Euler.

160. Dibuja con reglas y compás un triángulo isósceles de lados  $a=10,5\text{cm}$ ,  $b=10,5\text{cm}$  y ángulo  $\hat{C}=50^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado  $c$  y los otros dos ángulos? Halla el incentro, circuncentro, baricentro y ortocentro, además de la circunferencia inscrita y circunscrita. ¿Cuáles de estos tres puntos están alineados? Traza la recta de Euler. ¿Qué rectas y puntos notables coinciden en los triángulos isósceles?

161. Dibuja con reglas y compás un triángulo rectángulo con un cateto de 12cm y su ángulo opuesto de  $40^\circ$ . ¿Cuánto miden el resto de lados y ángulos? Halla el incentro, circuncentro, baricentro y ortocentro, además de la circunferencia inscrita y circunscrita. ¿Cuáles de estos tres puntos están alineados? Traza la recta de Euler. ¿Qué rectas y puntos notables coinciden en los triángulos rectángulos?



162. Dibuja con reglas y compás un triángulo equilátero de lados 95mm. ¿Cuánto miden sus ángulos? Halla el incentro, circuncentro, baricentro y ortocentro, además de la circunferencia inscrita y circunscrita. ¿Cuáles de estos tres puntos están alineados? Traza la recta de Euler. ¿Qué rectas y puntos notables coinciden en los triángulos equiláteros?
163. Dibuja con regla y compás un triángulo de lados 1dm, 1,4dm y 200mm. Halla el baricentro, el circuncentro, el incentro y el ortocentro, además de la circunferencia inscrita y circunscrita. Traza la recta de Euler.
164. Halla el baricentro, el circuncentro, el incentro y el ortocentro del triángulo determinado por los puntos siguientes:  $P=(0, 1)$ ,  $Q=(-3, -1)$ ,  $R=(5, -2)$ . Traza, además, las circunferencias circunscrita e inscrita y la recta de Euler.
165. Sea el triángulo limitado por los puntos  $A=(2, 1)$ ,  $B=(3, -2)$ ,  $C=(-1, 1)$ . Halla el baricentro, el circuncentro, el incentro y el ortocentro. Traza, además, las circunferencias circunscrita e inscrita y la recta de Euler.
166. ¿Qué es la recta de Euler? Dibújala en el triángulo de lados 7cm, 5cm y 6cm.
167. Dibuja la circunferencia circunscrita e inscrita del triángulo de lados 9cm, 12cm y 7cm. ¿Qué rectas y puntos están implicados? ¿Cómo es este triángulo desde el punto de vista de sus lados y sus ángulos? ¿Podrías trazar la recta de Euler con lo que has dibujado?
168. Dibuja el ortocentro y el baricentro del triángulo de lados 16cm, 7cm y 6cm. ¿Qué rectas están implicadas en estos puntos? ¿Cómo es este triángulo desde el punto de vista de sus lados y sus ángulos? ¿Podrías trazar la recta de Euler con lo que has dibujado?
169. Dibuja la recta de Euler del triángulo rectángulo de catetos 5cm y 12cm. Nota: no necesitas dibujar ninguna recta notable... ☺



170. Calcula el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 22cm de radio. Nota: tendrás que usar la conexión de circuncentro y baricentro en estos triángulos.
171. Calcula el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 12 cm de radio. Calcula su área con la fórmula de Herón.
172. Calcula el área en  $\text{dm}^2$  de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 15 m de radio.
173. ¿A cuántos centímetros de la base se encuentra el baricentro en un triángulo isósceles de base 6cm y lados desiguales 5cm?
174. Dibuja el triángulo de lados 4,5cm, 6cm y 7,5cm. ¿De qué tipo es este triángulo respecto a sus ángulos? ¿A qué distancia del lado de 7,5cm se encuentra el circuncentro?
175. Calcula el radio de una de las circunferencias que contiene una cuerda de 50cm. Nota: existen infinitas de estas circunferencias; con las herramientas que tú manejas ahora te será fácil averiguar por lo menos una.
176. Para la próxima Exposición Universal se va a construir una pasarela transparente sobre un lago circular de radio 24m. Si se quiere que la pasarela sea un triángulo equilátero con los vértices sobre el borde del lago, ¿de cuánto tendrá que ser su lado? ¿Cuál será la superficie de esta pasarela transparente?

## PROBLEMAS CON PROPIEDADES DE PUNTOS Y RECTAS NOTABLES



## ÁNGULOS Y SEGMENTOS

177. Dibuja un ángulo de  $60^\circ$ , otro de  $120^\circ$ , otro de  $240^\circ$ , otro de  $310^\circ$  y otro de  $420^\circ$ .
178. Traza un segmento de 6cm y dibuja un puntito en cada extremo. Desde el puntito de la derecha (vértice), dibuja para abajo un segmento de 5cm haciendo con el anterior un ángulo de  $115^\circ$ . En el extremo de la izquierda (el otro vértice), dibuja para abajo un tercer segmento de 8cm haciendo con el primero un ángulo de  $120^\circ$ .
179. Traza un segmento de 4,5cm y dibuja un puntito en cada extremo. Desde el puntito de la derecha (vértice), dibuja para arriba un segmento de 6cm haciendo con el anterior un ángulo de  $80^\circ$ . En el extremo de la izquierda (el otro vértice), dibuja para arriba un tercer segmento de 7cm haciendo con el primero un ángulo de  $30^\circ$ .
180. Traza un segmento de 5,5cm y dibuja un puntito en cada extremo. Desde el puntito de la derecha (vértice), dibuja un segmento de 7cm haciendo con el anterior un ángulo de  $220^\circ$ . En el extremo de la izquierda (el otro vértice), dibuja un tercer segmento de 8cm haciendo con el primero un ángulo de  $150^\circ$ .
181. Dibuja un segmento de 5cm. Paralelo a él y usando la escuadra y el cartabón, traza dos paralelas de 6cm y 7cm separadas 2cm unas de otras.
182. Dibuja un segmento de 7,5cm. Paralelo a él y usando la escuadra y el cartabón, traza dos paralelas de 4cm y 5cm separadas 1,5cm unas de otras.
183. Dibuja un segmento de 6cm y, apoyándote en él con la escuadra, traza tres segmentos perpendiculares de 3cm, 4cm y 5cm separados 1cm respectivamente.

184. Dibuja un segmento de 9cm y, apoyándote en él con la escuadra, traza tres segmentos perpendiculares de 5cm, 4,5cm y 6cm separados 2cm respectivamente.
185. Dibuja un segmento de 7cm y, apoyándote en él con la escuadra, traza dos segmentos perpendiculares de 3,5cm y 5cm separados 1,5cm respectivamente.
186. Traza un segmento de 6,5cm y dibuja un puntito en cada extremo. Desde el puntito de la derecha (vértice A), dibuja hacia arriba un segmento de 4cm haciendo con el anterior un ángulo de  $40^\circ$ . En el extremo de la izquierda (un segundo vértice B), dibuja hacia arriba un tercer segmento de 5cm haciendo con el primero un ángulo de  $140^\circ$ . ¿Se podría hacer un triángulo prolongando los segmentos? ¿Por qué?

## POLÍGONOS Y CIRCUNFERENCIAS

### TRIÁNGULOS

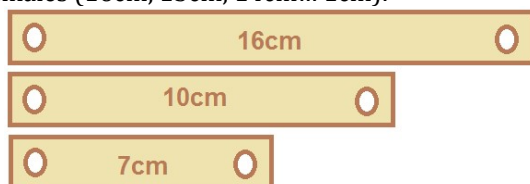
187. Traza un segmento de 4cm y dibuja un puntito en cada extremo. Desde el puntito de la derecha (vértice A), dibuja hacia abajo un segmento de 5cm haciendo con el anterior un ángulo de  $60^\circ$ . En el extremo de la izquierda (un segundo vértice B), dibuja hacia abajo un tercer segmento haciendo con el primero un ángulo de  $75^\circ$  y prolongalo hasta dar con el segmento de 5cm anterior (formando un tercer vértice C). ¿Qué figura se ha formado? ¿Cuánto miden sus tres ángulos interiores y sus tres lados?
188. Traza un segmento de 7,5cm y dibuja un puntito en cada extremo. Desde el puntito de la derecha (vértice A), dibuja hacia arriba un segmento de 5cm haciendo con el anterior un ángulo de  $45^\circ$ . En el extremo de la izquierda (un segundo vértice B), dibuja hacia arriba un tercer segmento haciendo con el primero un ángulo de  $100^\circ$  y prolongalo hasta dar con el segmento de 5cm anterior





(formando un tercer vértice C). ¿Qué figura se ha formado? ¿Cuánto miden sus tres ángulos interiores y sus tres lados?

189. Para los ejercicios que siguen, vas a necesitar listones de distintos tamaños. Prepara el material de siguiendo estas instrucciones: 1) en un plástico duro (tapa de encuadernar) traza líneas paralelas con 2cm de separación; 2) mide y recorta dos listones de 17cm, otros dos de 16cm, otros dos de 15cm y así sucesivamente hasta llegar a dos listones de 6cm; 3) recorta tres listones de 5cm, otros tres de 4cm y así hasta llegar a tres listones de 2cm; 4) con un encuadernador, haz un agujero a 0,5cm de cada extremo; 5) anota con un rotulador permanente las medidas de los listones finales (16cm, 15cm, 14cm... 1cm).

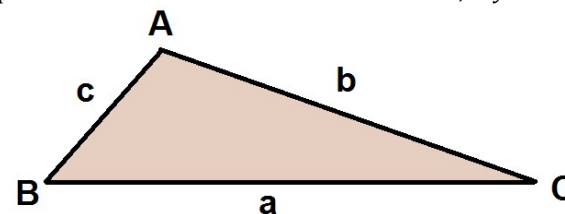


#### RECUERDA

Para que tres segmentos definan un triángulo, los dos segmentos menores sumados han de dar una cantidad más grande que el segmento mayor.

190. Coge tres listones de 3cm, 6cm y 11cm. ¿Es posible formar un triángulo con ellos? ¿Dónde crees que está el problema?
191. ¿Es posible dibujar un triángulo de lados 6cm, 8cm y 1,5dm? Reflexiona con los listones adecuados. En caso afirmativo, dibújalo con regla y compás. Mide sus ángulos. ¿Cuánto mide la suma de estos tres ángulos?
192. ¿Es posible dibujar un triángulo de lados 4cm, 0,5dm y 9cm? Reflexiona con los listones adecuados. En caso afirmativo, dibújalo con regla y compás. Mide sus ángulos. ¿Cuánto mide la suma de estos tres ángulos?

193. ¿Es posible dibujar un triángulo de lados 3cm, 90mm y 10cm? Reflexiona con los listones adecuados. En caso afirmativo, dibújalo con regla y compás. Mide sus ángulos. ¿Cuánto mide la suma de estos tres ángulos?
194. ¿Es posible dibujar un triángulo de lados 9cm, 13cm y 15cm? Reflexiona con los listones adecuados. En caso afirmativo, dibújalo con regla y compás. Mide sus ángulos. ¿Cuánto mide la suma de estos tres ángulos? ¿Cómo se llama este triángulo respecto a sus ángulos? ¿Y respecto a sus lados?
195. ¿Es posible dibujar un triángulo de lados 6cm, 6cm y 13cm? Reflexiona con los listones adecuados. En caso afirmativo, dibújalo con regla y compás. Mide sus ángulos. ¿Cuánto mide la suma de estos tres ángulos? ¿Cómo se llama este triángulo respecto a sus ángulos? ¿Y respecto a sus lados?
196. Los lados de un triángulo se nombran con las letras minúsculas  $a$ ,  $b$  y  $c$ ; los vértices de un triángulo se nombran en mayúsculas según el lado que tienen opuesto  $A$ ,  $B$  y  $C$ ; los ángulos correspondientes a esos vértices se nombran  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ .



Dibuja con regla y compás un triángulo con  $a=8\text{cm}$ ,  $b=10\text{cm}$  y  $c=5\text{cm}$ . Reflexiona primero con los listones adecuados. ¿Cuánto miden los ángulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?

197. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $a=9\text{cm}$ ,  $b=7\text{cm}$  y  $c=9\text{cm}$ . Reflexiona primero con los listones adecuados. ¿Cuánto miden los ángulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?



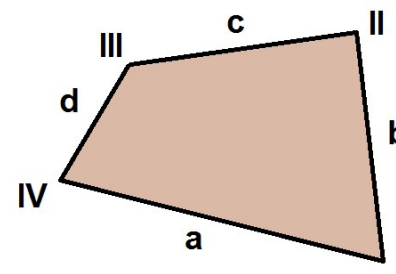
198. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $a = 13\text{cm}$ ,  $b = 6\text{cm}$  y  $c = 9\text{cm}$ . Reflexiona primero con los listones adecuados. ¿Cuánto miden los ángulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?
199. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $a = 90\text{mm}$ ,  $b = 12\text{cm}$  y  $c = 1,5\text{dm}$ . Reflexiona primero con los listones adecuados. ¿Cuánto miden los ángulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?
200. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $a = 8\text{cm}$ ,  $b = 10\text{cm}$  y  $\hat{C} = 25^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado  $c$  y los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?
201. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $a = 12\text{cm}$ ,  $c = 7\text{cm}$  y  $\hat{B} = 115^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado  $b$  y los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{C}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?
202. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $a = 10\text{cm}$ ,  $b = 10\text{cm}$  y  $\hat{C} = 20^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado  $c$  y los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?
203. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $b = 9\text{cm}$ ,  $c = 1,3\text{dm}$  y  $\hat{A} = 100^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado  $a$  y los ángulos  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?
204. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $a = 1,1\text{dm}$ ,  $c = 11\text{cm}$  y  $\hat{B} = 60^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado  $b$  y los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{C}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?
205. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $a = 3\text{cm}$ ,  $b = 4\text{cm}$  y  $\hat{C} = 90^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado  $c$  y los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?
206. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $a = 8\text{cm}$ ,  $c = 80\text{mm}$  y  $\hat{C} = 60^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado  $b$  y los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?
207. Dibuja con regla y compás un triángulo con  $b = 6\text{cm}$ ,  $c = 0,6\text{dm}$  y  $\hat{C} = 45^\circ$ . ¿Cuánto mide el lado  $a$  y los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ ? ¿Cómo se llama este triángulo según sus lados? ¿Y según sus ángulos?

## CUADRADOS

208. Dibuja con reglas un cuadrado de lados  $6\text{cm}$ .

## OTROS CUADRILÁTEROS

209. Los lados de un cuadrilátero se van a nombrar con letras minúsculas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Por su parte, los ángulos se nombrarán con número romanos I, II, III y IV siguiendo el orden a derechas desde el lado  $a$  como muestra la figura.



Dibuja con reglas un cuadrilátero de lados  $a = 7\text{cm}$ ,  $b = 6\text{cm}$ ,  $c = 4\text{cm}$  y  $d = 3\text{cm}$ , con ángulos  $I = 70^\circ$ ,  $II = 85^\circ$ ,  $III = 125^\circ$ ,  $IV = 80^\circ$ .

210. Dibuja con reglas un rombo de lados  $8\text{cm}$  y ángulos iguales dos a dos de  $145^\circ$  y  $35^\circ$ .
211. Dibuja con reglas un trapecio rectángulo con base mayor de  $13\text{cm}$ , base menor de  $5\text{cm}$  y lado perpendicular de  $5\text{cm}$ . ¿Cuánto mide el otro lado? ¿Cuánto miden sus ángulos?
212. Coge cuatro listones de  $3\text{cm}$ ,  $5\text{cm}$ ,  $4\text{cm}$  y  $15\text{cm}$ . ¿Es posible construir un cuadrilátero con ellos? ¿Dónde crees que está el problema?
213. Intenta construir con listones un cuadrilátero de lados  $3\text{cm}$ ,  $5\text{cm}$ ,  $6\text{cm}$  y  $13\text{cm}$ . ¿Es posible hacerlo? En caso afirmativo, calca uno de ellos en el cuaderno y mide los ángulos interiores. ¿Cuánto suman estos ángulos? ¿Tiene algún nombre especial esta figura?
214. ¿Es posible dibujar un cuadrilátero de lados  $5\text{cm}$ ,  $0,7\text{dm}$ ,  $110\text{mm}$  y  $0,14\text{m}$ ? Reflexiona con los listones adecuados. En caso



afirmativo, calca en el cuaderno uno de ellos. Mide los ángulos interiores con el transportador de ángulos. ¿Cuánto suman estos ángulos? ¿Tiene algún nombre especial esta figura?

215. ¿Es posible dibujar un cuadrilátero de lados 8cm, 0,8dm, 20mm y 0,02m? Reflexiona con los listones adecuados. En caso afirmativo, calca uno de ellos en el cuaderno y mide sus ángulos interiores con el transportador de ángulos. ¿Tiene algún nombre especial esta figura? ¿Cuánto suman los ángulos interiores de este cuadrilátero?

### Sin Pitágoras

#### RECUERDA

Un **polígono** es la región cerrada del plano delimitada por segmentos de recta llamados **lados**. Dos lados confluyen en un punto llamado **vértice**.

Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Por qué cojean las mesas? ¿Qué talla me compro?



POLÍGONOS		
POLÍGONO	CARACTERÍSTICAS	ÁREA o SUPERFICIE
TRIÁNGULOS	El triángulo es el polígono de tres lados. Existen dos clasificaciones. Según sus lados: equilátero (tres lados iguales), isósceles (dos lados iguales y uno desigual) y escaleno (tres lados distintos). Según sus ángulos: acutángulo (los tres ángulos agudos), rectángulo (un ángulo recto) y obtusángulo (un ángulo obtuso). El equilátero es el triángulo regular (lados iguales y ángulos de 60°).	FÓRMULA DE LA ALTURA => $\text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = s \cdot \frac{b \cdot h}{2}$ FÓRMULA DE HERÓN => $\text{Área} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ siendo $s$ el semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$
CUADRILÁTEROS	CUADRADOS	El cuadrado es el cuadrilátero regular => tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales a 90°.
	ROMBOS	El rombo no es regular porque si bien tiene todos sus lados iguales, sus ángulos son distintos (aunque si son iguales por parejas, dos agudos y dos obtusos)
	RECTÁNGULOS	El rectángulo es el cuadrilátero con todos los ángulos iguales a 90° y los lados iguales por parejas.
	ROMBOIDES	El romboide es el cuadrilátero con los ángulos iguales por parejas (dos agudos y dos obtusos) y los lados iguales por parejas.
	TRAPECIOS	Los trapecios son cuadriláteros con dos lados paralelos. Dependiendo de las características de los otros dos lados, distinguimos tres tipos de trapecios: trapecios rectángulos (cuando uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases), trapecios isósceles (cuando los dos lados no paralelos son iguales) y trapecios escalenos (cuando los dos lados no paralelos son desiguales).
POLÍGONOS REGULARES (n lados)	Un polígono es regular cuando todos sus lados y todos sus ángulos son iguales. Los polígonos regulares tienen un punto (centro del polígono) desde donde se trazan sus apotemas (rectas en perpendicular a los lados).	$\text{Área} = \frac{(\text{Base}_{\text{Mayor}} + \text{Base}_{\text{Menor}}) \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$ $\text{Área} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$
POLÍGONOS NO REGULARES	POR TRIANGULACIÓN => se descompone la figura de n lados en n-1 triángulos y se calculan las áreas parciales con HERÓN.	

### TRIÁNGULOS TRIANGLES

216. ¿Es posible dibujar un triángulo de lados 7cm, 9cm y 11cm? En caso afirmativo, dibújalo con regla y compás. Mide sus ángulos. ¿Cuánto mide la suma de estos tres ángulos? ¿Cómo se llama este triángulo respecto a sus ángulos? ¿Y respecto a sus lados? Levanta una perpendicular desde el lado que mide 7cm (o su prolongación) pasando por el vértice opuesto y mide con regla el segmento llamado altura.

*Is it possible to draw a triangle with side lengths 7cm, 9cm and 11cm? In affirmative case, draw it with a ruler and a compass. Measure its angles. What is the measurement of the addition of its three angles? What's the name of this triangle taking into account its angles? And what about their sides? Draw a perpendicular from the side that measures 7cm (or its extension) going through the opposite vertex and measure with ruler the line segment called height.*



217. ¿Es posible dibujar un triángulo de lados 4cm, 1dm y 10cm? En caso afirmativo, dibújalo con regla y compás. Mide sus ángulos. ¿Cuánto mide la suma de estos tres ángulos? ¿Cómo se llama este triángulo respecto a sus ángulos? ¿Y respecto a sus lados? Levanta una perpendicular desde el lado que mide 4cm (o su prolongación) pasando por el vértice opuesto y mide con regla el segmento llamado altura.

*Can you draw a triangle with side lengths 4cm, 1dm and 10cm? If so, draw it with a ruler and a compass. Measure its angles. What is the sum of these three angles? What is the name of this triangle taking into account its angles? And what type of triangle is it taking into account its sides? Draw a perpendicular line from the side with length 4cm (or its extension) going through the opposite vertex and measure with the ruler the line segment called height.*

#### RECUERDA LA FÓRMULA DE HERÓN

(REMEMBER HERON'S FORMULA):

$$\text{área del triángulo} \rightarrow \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

218. ¿Es posible dibujar un triángulo de lados 70mm, 7cm y 13cm? En caso afirmativo, dibújalo con regla y compás. Mide sus ángulos. ¿Cuánto mide la suma de estos tres ángulos? ¿Cómo se llama este triángulo respecto a sus ángulos? ¿Y respecto a sus lados? Levanta una perpendicular desde uno de los lados que mide 7cm (o su prolongación) pasando por el vértice opuesto y mide con regla el segmento llamado altura. Calcula el perímetro y semiperímetro del triángulo, el área usando la fórmula de Herón (ayúdate de calculadora) y el área usando la altura recién aproximada con regla. Compara esta área con el cálculo erróneo de multiplicar lado por lado dividido entre dos.

*Can you draw a triangle with side lengths 70mm, 7 cm and 13cm? If so, draw it with a ruler and a compass. Measure its angles. What is the sum of these three angles? What is the name of this triangle according to their angles? What is the name of this triangle according to its sides? Draw a perpendicular line from the side with length 7cm (or its extension) going through the opposite vertex and measure the line segment called altitude.*

*Calculate the perimeter and semiperimeter of the triangle, its area using Heron's formula (use the calculator) and the area of the approximate height you have calculated with the ruler. Compare this area with the wrong calculation got when multiplying side by side divided by two.*

219. ¿Es posible dibujar un triángulo de lados 4cm, 0,7dm y 0,09m? En caso afirmativo, dibújalo con regla y compás. Levanta una perpendicular desde el lado que mide 4cm (o su prolongación) pasando por el vértice opuesto y mide con regla el segmento llamado altura. Calcula el perímetro y semiperímetro del triángulo, el área usando la fórmula de Herón (ayúdate de calculadora) y el área usando la altura recién aproximada con regla. Compara esta área con el cálculo erróneo de multiplicar lado por lado dividido entre dos.

*Can you draw a triangle with side lengths 4cm, 0.7dm and 0.09m? If so, draw it with a ruler and a compass. Draw a perpendicular line from the side with length 4cm (or its extension) going through the opposed vertex and measure with a ruler the line segment called height. Calculate the perimeter and semiperimeter of the triangle, its area using Heron's formula (use the calculator) and its area using the approximate height you have calculated with the ruler. Compare this area with the wrong calculation got when multiplying side by side divided by two.*

220. ¿Es posible dibujar un triángulo de lados 9cm, 1,1dm y 18cm? En caso afirmativo, dibújalo con regla y compás. ¿Cómo se llama este triángulo respecto a sus ángulos? ¿Y respecto a sus lados? Levanta una perpendicular desde el lado que mide 1,1dm (o su prolongación) pasando por el vértice opuesto y mide con regla el segmento llamado altura. Calcula el perímetro y semiperímetro del triángulo, el área usando la fórmula de Herón (ayúdate de calculadora) y el área usando la altura recién aproximada con regla. Compara esta área con el cálculo erróneo de multiplicar lado por lado dividido entre dos.

*Can you draw a triangle with side lengths 9cm, 1.1dm and 18cm? If so, draw it with a ruler and a compass. What is the name of this triangle according to its angles? What is the name of the triangle according to its sides? Draw a perpendicular line from the side with length 1.1dm (or its*



extension) going through the opposite vertex and measure the line segment called height with a ruler. Calculate the perimeter and semiperimeter of the triangle, its area using Heron's formula (use the calculator) and the area of the approximate height you have calculated with the ruler. Compare this area with the wrong calculation got when multiplying side by side by two.

221. Dibuja tres triángulos distintos con base 4cm y altura 3cm. Draw three different triangles that have a base of 4cm and a height of 3cm.

222. Dibuja tres triángulos distintos (uno acutángulo, otro rectángulo y otro obtusángulo) de base 5cm y altura 3cm. Draw three different triangles (acute, right and obtuse) that have a base of 5cm and a height of 3cm.

223. Dibuja dos triángulos obtusángulos distintos de base 4cm y altura 5cm. Draw two different obtuse triangles that have a base of 4cm and a height of 5cm.

224. Dibuja tres triángulos distintos que tengan la misma área de  $16\text{cm}^2$  y todas las alturas iguales. Nota: date cuenta de que para que el área sea  $16\text{cm}^2$ , la multiplicación de base y altura ha de ser 32. Draw three different triangles that have an equal area of  $16\text{cm}^2$  and equal heights. Note that the multiplication of base length by height must be 32 if the area is  $16\text{cm}^2$ .

225. Dibuja tres triángulos distintos que tengan la misma área de  $18\text{cm}^2$  y diferentes alturas todas. Nota: date cuenta de que para que el área sea  $18\text{cm}^2$ , la multiplicación de base y altura ha de ser 36. Draw three different triangles that have an equal area of  $18\text{cm}^2$  and different heights. Note that the multiplication of base length by height must be 36 if the area is  $18\text{cm}^2$ .

226. Dibuja tres triángulos distintos (uno acutángulo, otro rectángulo y otro obtusángulo) que tengan la misma área de  $12\text{cm}^2$  y diferentes alturas todas. Nota: date cuenta de que para que el área sea  $12\text{cm}^2$ , la multiplicación de base y altura ha de ser 24.

Draw three different triangles (acute, right and obtuse type) with an equal area of  $12\text{cm}^2$  but different heights. Note that the multiplication of base length by height must be 24 if the area is  $12\text{cm}^2$ .

227. Calcular el área en  $\text{mm}^2$  de un triángulo de base 36,4cm y altura 35,4cm.

Calculate the area (in  $\text{mm}^2$ ) of a triangle with a base length of 36.4cm and height 35.4cm.

228. Dibujar un triángulo equilátero de 5,5cm de lado, medir la altura y calcular el área. Draw an equilateral triangle with 5.5cm per side. Measure the height and calculate the area of this triangle.

229. Dibuja seis triángulos (todos distintos), cada uno como ejemplo de la clasificación de triángulos según sus ángulos (acutángulo, rectángulo, obtusángulo) y según sus lados (equilátero, isósceles, escaleno). Hazlos del tamaño de la palma de tu mano y señala las medidas de sus lados y sus ángulos. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos en cada triángulo? Calcula el perímetro y el semiperímetro de cada uno de los seis triángulos.

Draw six different triangles, each of them should be an example of the classification of triangles according to their angles (acute, right and obtuse) and according to their sides (equilateral, isosceles, and scalene). Draw them having the same size as the palm of your hand and indicate the measures of their sides and angles. What is the sum of the angles of each triangle? Calculate the perimeter and the semiperimeter of each of the six triangles.

230. En cada triángulo del ejercicio anterior, elige uno de los lados como base y traza su altura correspondiente. Mídela con regla. Take all the triangles of the previous exercise, choose one of the sides as base and draw their height. Measure them with a ruler.

231. Calcula, de cada uno de los seis triángulos anteriores, el área usando la fórmula de Herón (ayúdate de calculadora) y el área usando la altura recién aproximada con regla. Compara esta área con el cálculo erróneo de multiplicar lado por lado dividido entre dos.





Calculate the area of each of the six previous triangles using Heron's formula (use the calculator) and then using the approximate altitude calculated with the ruler. Compare this area with the wrong calculation got when multiplying side by side divided by two.

232. El área de un triángulo es  $865\text{cm}^2$  y la altura  $23,5\text{dm}$ .

Calcular la base en metros.

*If the surface area of a triangle is  $865\text{ cm}^2$  and its height is  $23.5\text{ dm}$ , what's its base in metres?*

233. El área de un triángulo es  $86\text{Ha}^2$  y la altura  $165\text{m}$ . Calcular la base en Dam.

*The area of a triangle is  $86\text{Ha}^2$  and its height  $165\text{m}$ . Calculate the base in Dam.*

234. La superficie de un triángulo es  $975\text{dm}^2$  y la base  $12,6\text{m}$ .

Calcular la altura en cm.

*The area of a triangle is  $975\text{dm}^2$  and its base  $12.6\text{m}$ . Calculate its height in cm.*

### PROBLEMAS DE TRIÁNGULOS PROBLEMS OF TRIANGLES

235. Valentín y Jesús van de excursión a Segovia y aparcan el coche al pie del acueducto, aunque solo Valentín se anima a subir para contemplar la vista panorámica de la ciudad. Una vez arriba, Valentín mira hacia abajo y ve a su amigo Jesús a  $30\text{m}$  con un ángulo de  $45^\circ$  (con respecto a la línea del acueducto) a la derecha del acueducto, mientras que el coche lo ve a  $40\text{m}$  en el lado izquierdo con un ángulo de  $15^\circ$  (con respecto a la línea del acueducto). Dibuja la situación. ¿Cuántos triángulos identificas? Mide todos los ángulos formados. ¿Cuánto suman? Nota: para dibujarlo lo más fielmente posible, toma los  $30\text{m}$  por  $3\text{cm}$  y los  $40\text{m}$  por  $4\text{cm}$ .

*Valentín and Jesús are going on a trip to Segovia and they park their car very close to the aqueduct, although only Valentín dared to go up to enjoy of the views of the city. Once up, Valentín looks down and can see Jesús at  $30\text{m}$  with an angle of  $45^\circ$  (taking into account the line of the aqueduct) to the right side of the aqueduct, while he can see their car on the left at  $40\text{m}$  and with an angle of  $15^\circ$  (taking into account the line of the*

*aqueduct). Draw the situation. How many triangles can you identify? Measure all the angles. What is the sum of the angles? Note that to be able to draw it as accurately as possible, use  $3\text{cm}$  when it says  $30\text{m}$  and  $4\text{cm}$  when it says  $40\text{m}$ .*

236. Unos bomberos son llamados por los propietarios de un bloque de pisos para bajar a un gatito de una ventana. Para tal empresa, llevan una escalera de  $12\text{metros}$  que despliegan entera y apoyan en la pared del edificio, distanciándose  $2,5\text{m}$  en su base. Dibuja la situación y mide la altura a la se encuentra el gatito. Mide los ángulos del triángulo formado. ¿Cuánto suman entre todos? Nota: para dibujarlo lo más fielmente posible, toma los  $12\text{m}$  por  $12\text{cm}$  y los  $2,5\text{m}$  por  $2,5\text{cm}$ .

*The owners of a block of flats call the fire brigade to get a cat down from a window. To do so, they use a ladder of  $12\text{m}$  that they completely unfold and place it on the wall of the building, being  $2.5\text{m}$  far from its base. Draw the situation and measure the height the cat is at. Measure the angles of the triangle formed. What is the sum of all of the angles? Note that in order to draw it as accurately as possible you should use  $12\text{cm}$  when it says  $12\text{m}$  and  $2.5\text{cm}$  when it says  $2.5\text{m}$ .*

237. Antonio y Lola están sentados con sus amigos respectivos en sus toallas de playa separadas una de otra  $50\text{m}$ . Ambos miran un barquito en el mar: Antonio con un ángulo de  $30^\circ$  y Lola con un ángulo de  $115^\circ$ , ambos respecto a la línea Antonio-Lola. Dibuja la situación y mide a qué distancia está el barquito de cada uno de ellos. Nota: para dibujarlo lo más fielmente posible, toma los  $50\text{m}$  por  $5\text{cm}$ .

*Antonio and Lola are sitting with their friends on their beach towels which are separated  $50\text{m}$  one from another. Both are looking at a ship in the sea: Antonio is looking at it with an angle of  $30^\circ$  and Lola, with an angle of  $115^\circ$ . Draw the situation and measure the distance existing between the ship and each of them. Note that in order to draw it as accurately as possible, you should use  $5\text{cm}$  when it says  $50\text{m}$ .*

238. Una señora tiene una azotea de  $10\text{m}$  de ancha y quiere cubrirla construyendo encima un tejado a dos aguas iguales que salve los  $2\text{m}$  en el centro. Dibuja la solución. Mide qué grados de



inclinación tiene el tejado y la longitud de sus aguas. ¿Cómo se llama la figura que te ha salido?

*A woman has a flat roof that is 10m width and she wants to cover it by building a gable roof above it that covers the 2m in the centre. Draw the solution. Measure the degrees of inclination and the slope sides the roof has. What is the name of the figure you got?*

239. El mástil de un barco mide 16m y no está colocado en el centro de la nave. Si desde la proa se ve la punta del mástil con  $75^\circ$  (con respecto a la línea del barco), dibuja la situación ayudándote del transportador de ángulos y deslizando una regla por la línea del barco hasta cuadrar las medidas. ¿A cuántos metros está la base del mástil de la proa del barco? Si desde la popa se ve la punta del mástil con un ángulo de  $60^\circ$  (con respecto a la línea del barco), dibuja la situación ayudándote del transportador de ángulos y una regla que debes deslizar por la línea del barco hasta cuadrar las medidas. ¿A cuántos metros está la base del mástil de la popa del barco? ¿Cuánto mide, por tanto, de eslora el barco? Suponiendo que la vela está atada al mástil, a la proa y a la popa, ¿cuánta superficie de tela hay?

*The mast of a ship has 16m and it is not placed in the middle of the ship. If the tip of the mast can be seen from the bow with  $75^\circ$  from the line of the ship, draw the situation using a protractor and gliding the ruler along the line of the ship until you can adjust the measures. How far is the base of the mast from the bow of the ship? If the tip of the mast can be seen with an angle of  $60^\circ$  from the stern (taking as reference the line of the ship), draw the situation using a protractor and a ruler that you should glide along the line of the ship until you can adjust the measure. How far is the base of the mast from the stern of the ship? What is the length of the ship? If the sail is tied to the mast, to the bow and the stern, what is the area of the sail?*

240. En la playa de El Verger hay un rompeolas de 40m de largo que sale en perpendicular de la línea de costa. Mi familia tiene puestas las toallas en la arena. Mi hermano se va dando un paseo por la orilla hasta la base del rompeolas y, al volver, nos dice que desde las toallas hasta allí hay 30m. Dibuja la situación fielmente (toma los

metros por centímetros). ¿Qué figura poligonal se ha formado? Mide con la regla y el transportador todos los ángulos y lados de la figura. ¿A qué distancia están las toallas de la punta final del rompeolas? ¿Con qué ángulo vería nuestras toallas un bañista que estuviese al final del rompeolas (respecto a la línea del rompeolas)? ¿De qué tipo es este polígono respecto a sus lados y respecto a sus ángulos? ¿Qué perímetro tiene esta figura? ¿Cuánto suman todos los ángulos interiores del polígono? Calcula su superficie con la fórmula de la altura.

*In the beach of El Verger there is a breakwater of 40m length that goes out from the line of the coast forming a perpendicular. My family has the towels on the sand. My brother goes for a walk until the base of the breakwater and, when he comes back, he tells us that from the towels until the breakwater there are 30m. Draw the situation as accurately as possible using centimetres when it says metres. What polygonal form have you got? Measure with the ruler and the protractor all the angles and the sides of the figure. Which distance are the towels from the corner of the breakwater? If a bather is at the end of the breakwater (according to the line of the breakwater) what angle will the bather see the towels with? What kind of polygon is it according to their sides and angles? What is the perimeter of this figure? What is the sum of the interior angles of this polygon? Calculate the area with the formula of the height.*

### CUADRADOS SQUARES

241. Dibuja un cuadrado de 4,5cm de lado y da el perímetro en dm. ¿Cuánto suman sus ángulos interiores? ¿Cuánto vale cualquiera de sus alturas? Calcula su área por tres métodos: 1) con la fórmula del cuadrado; 2) dividiendo el cuadrado en dos triángulos y aplicando la fórmula de Herón (ayúdate de calculadora); 3) dividiendo el cuadrado en dos triángulos y aplicando la fórmula de la altura.

*Draw a square with 4.5 cm per side and calculate the perimeter in dm. What's the sum of its interior angles? What's the measure of any of its heights? Calculate the area through three different procedures: 1)*





Through the **square formula**; 2) *Dividing the square into two triangles and applying the **Heron's formula** (make use of your calculator)*; 3) *Dividing the square into two triangles and applying the **height formula**.*

242. Dibuja un cuadrado de 0,63 dm de lado y da el perímetro en mm. ¿Cuánto suman sus ángulos interiores? ¿Cuánto vale cualquiera de sus alturas? Calcula su área por tres métodos: 1) con la fórmula del cuadrado; 2) dividiendo el cuadrado en dos triángulos y aplicando la fórmula de Herón (ayúdate de calculadora); 3) dividiendo el cuadrado en dos triángulos y aplicando la fórmula de la altura.

*Draw a square with a side length 0.63dm and calculate the perimeter in mm. What is the sum of their interior angles? What is the measure of any of their heights? Calculate the area using the following methods: 1) the formula of the square; 2) dividing the square of two triangles and using Heron's formula (use the calculator); 3) dividing the square into two triangles and using the formula of the height.*

243. Dibuja el cuadrado que tiene por área  $16\text{cm}^2$ . ¿Cuánto miden sus lados? ¿Cuánto suman sus ángulos interiores? Nota: para hallar el lado del cuadrado tienes que echar mano de las tablas de multiplicar. *Draw a square of  $16\text{cm}^2$  of area. What is the measure of its sides? What is the sum of their interior angles? Note that to find the side of the square you have to use the multiplication tables.*

244. Dibuja el cuadrado que tiene por área  $1\text{dm}^2$ . ¿Cuánto miden sus lados en cm? ¿Cuánto suman sus ángulos interiores? Nota: para hallar el lado del cuadrado tienes que echar mano de las tablas de multiplicar.

*Draw a square of  $1\text{dm}^2$  of area. What is the measure of its sides in cm? What is the sum of their interior angles? Note that to find the side of the square you have to use the multiplication tables.*

### PROBLEMAS DE CUADRADOS SQUARE PROBLEMS

245. Un terreno en forma de cuadrado de lado 14m tiene en el centro una casa también cuadrada de 6m de lado. Dibuja la situación. ¿Cuál es la superficie del terreno? ¿Cuál es la superficie de la casa?

¿Cuál es la superficie que queda para jardín? Nota: para calcular el centro de los cuadrados tienes que ayudarte de sus diagonales.

*A square land of side 14m has its centre in a square house of side length 6m. Draw the situation. What is the area of the land? What is the area of the house? What is the area left for a garden? Note that to calculate the centre of the squares you have to use its diagonals.*

246. Una nave cuadrada de 120m de perímetro se amuebla como call center para 144 trabajadores. Si reparten el área equitativamente entre todos, ¿qué porción en  $\text{dm}^2$  le queda a cada uno? Dibuja la situación.

*A square building of perimeter 120m is furnished to be used as a call centre for 144 workers. If the area is shared in equal parts among all of them, what portion in  $\text{dm}^2$  is left for each of them? Draw the situation.*

247. Un parque está limitado por una fuente, un cedro, un kiosko y un paso de cebra. Pablo está en el paso de cebra y, desde allí, ve el kiosko y el cedro haciendo un ángulo de  $45^\circ$  (mano izquierda en dirección al kiosko y mano derecha en dirección al cedro); con un láser averigua que entre él y el kiosko hay 30m y, entre él y el cedro 43m; por otra parte, Pedro está en el cedro, desde donde ve la fuente y el paso de cebra con un ángulo de otros  $45^\circ$  (mano izquierda hacia la fuente y mano derecha hacia el paso de cebra); con otro láser averigua que entre él y la fuente también hay 30m. ¿Qué figura forma el parque? ¿Qué superficie tiene el parque? Dibuja la situación.

*A park that is bordered by a fountain, a cedar, a kiosk and a zebra crossing. Pablo is in the zebra crossing, and, from there, you see the kiosk and the cedar that form an angle of  $45^\circ$  (on the left hand side heading towards the kiosk and on the right hand side heading towards the cedar); with a laser he finds out that between him and the kiosk there are 30m and between him and the cedar, 43m. Pedro is next to the cedar, from there, he sees the fountain and the zebra crossing with an angle of  $45^\circ$  (on the left hand side heading towards the fountain and on the right hand side heading towards the zebra crossing); with another laser he finds out that between him and the fountain there are 30m. What is the figure of the park? What is the area of the park? Draw the situation.*



### OTROS CUADRILÁTEROS OTHER QUADRILATERALS

248. Dibuja un rectángulo de ancho 12cm y alto 60mm. Traza su centro como punto de corte de sus diagonales. Calcula su área en  $\text{dm}^2$ .

*Draw a rectangle of 12cm width and 60mm height. Draw the middle as intersection of its diagonals. Calculate its area in  $\text{dm}^2$ .*

249. Dibuja y calcula el área de un rombo de diagonales 35mm y 12cm en  $\text{cm}^2$ . ¿Cuánto miden sus lados? ¿Cuánto suman sus ángulos interiores?

*Draw and calculate the area of a rhombus whose diagonals are 35 mm and 12 cm in  $\text{cm}^2$ . What's the length of its sides? What's the sum of its interior angles?*

250. Dibuja y calcula el área en  $\text{mm}^2$  de otro rombo de diagonales 0,4dm y 3cm. ¿Cuánto miden sus lados? ¿Cuánto suman sus ángulos interiores?

*Draw and calculate the area of a rhombus in  $\text{mm}^2$  whose diagonals are 0.4dm and 3cm. What is the length of its sides? What's the sum of its interior angles?*

251. Dibuja y calcula el área de un rombo de diagonales 90mm y 0,6dm. ¿Cuánto miden sus lados? ¿Cuánto suman sus ángulos interiores? Dibuja un cuadrado de lado 2cm centrado dentro del rombo. Calcula el área entre el cuadrado y el rombo.

*Draw and calculate the area of a rhombus whose diagonals are 90mm and 0.6dm. What is the length of its sides? What is the sum of its interior angles? Draw a square of side 2cm in the middle of a rhombus. Calculate the area left between the square and the rhombus.*

252. Dibuja y calcula el área de un rombo en  $\text{cm}^2$  que tiene por diagonales segmentos de 245mm y  $\frac{3}{5}$  de 245mm. ¿Cuánto miden sus lados? ¿Cuánto suman sus ángulos interiores?

*Draw and calculate the area of a rhombus in  $\text{cm}^2$  whose diagonals are 245mm and  $\frac{3}{5}$  of 245mm. What are their side lengths? What is the sum of its interior angles?*

253. Dibuja un trapecio isósceles de bases 45mm y 35mm y los lados no paralelos de 25mm cada uno (traza los 45mm, ayúdate del compás para marcar los 25mm y desliza la regla en paralelo a la base mayor hasta encontrar los 35mm). Calcula el perímetro en m y el área en  $\text{dm}^2$ . Mide los ángulos. ¿Cuánto suman sus ángulos interiores?

*Draw an isosceles trapezoid whose bases are 45mm and 35mm and its non parallel side lengths are 25mm each (draw the 45mm, use a compass to mark the 25mm and glide the ruler in parallel until the major base till you can measure 35mm). Calculate the perimeter in m and the area in  $\text{dm}^2$ . Measure the angles. What is the sum of its interior angles?*

254. Dibuja con reglas el trapecio rectangular de lados paralelos (bases) 12cm y 9cm con lado perpendicular 7cm. ¿Cuánto mide el otro lado? Calcula el perímetro y el área. ¿Cuánto suman sus ángulos interiores?

*Draw with a ruler a rectangular trapezoid of parallel side lengths (bases) 12cm and 9 cm with a perpendicular leg of 7cm. What is the length of the other side? Calculate the perimeter and the area. What is the sum of its interior angles?*

255. Dibuja un trapecio isósceles de bases 6cm y 10cm con altura de 4cm. ¿Cuánto miden sus lados? Calcula el perímetro y el área.

*Draw an isosceles trapezium whose base lengths are 6cm and 10cm and height is 4cm. What are its side lengths? Calculate the perimeter and the area of this trapezium.*

256. Un trapecio isósceles mide de bases 5,5cm y 8cm, con lados 4,5cm y 4,5cm. ¿Cuál será el perímetro en mm? ¿Cuánto suman sus ángulos interiores? Dibújalo: traza los 5,5cm, ayúdate del compás para marcar los 4,5cm y desliza la regla en paralelo a la base mayor hasta encontrar los 8cm.

*An isosceles trapezoid has bases of 5.5 and 8 cm, with legs 4.5cm and 4.5 cm. What is the perimeter in mm? What is the sum of its interior angles. Draw the 5.5cm and use the compass to mark 4.5cm and glide the ruler in parallel to the major base until you get 8cm.*



257. El área de un rombo mide  $120\text{m}^2$  y una diagonal  $20\text{m}$ . Dibújalo fielmente y mide sus lados. Calcula el perímetro. ¿Cuánto suman sus ángulos interiores? Nota: toma los  $20\text{m}$  por  $2\text{cm}$ .  
*The area of a rhombus is  $120\text{m}^2$  and a diagonal of  $20\text{m}$ . Draw it as accurately as possible and measure the length of their sides. Calculate the perimeter. What is the sum of their interior angles? Note that you have to use  $2\text{cm}$  when it says  $20\text{m}$ .*

258. El área de un rectángulo es  $1.400\text{m}^2$ . Si la altura mide  $20\text{m}$ . ¿Cuánto mide la base? Dibújalo fielmente. Nota: toma los  $20\text{m}$  por  $2\text{cm}$ .  
*The area of a rectangle is  $1.400\text{m}^2$ . If the height is  $20\text{m}$  what is the length of its base? Draw it as accurately as possible. Note that you have to use  $2\text{m}$  when it says  $20\text{m}$ .*

259. Calcula el perímetro de un rectángulo de lado mayor  $14\text{dm}$  y lado menor los  $3/5$  del mayor. Dibújalo fielmente. Nota: toma los  $14\text{dm}$  por  $14\text{cm}$ .  
*Calculate the perimeter of a rectangle that has a base of  $14\text{dm}$  and a length which is  $3/5$  of the base. Draw it as accurately as possible. Note that you have to use  $14\text{cm}$  when it says  $14\text{dm}$ .*

260. Dibuja dos paralelogramos distintos de base  $4\text{cm}$  y altura  $5\text{cm}$ .  
*Draw two different parallelograms with base  $4\text{cm}$  and height  $5\text{cm}$ .*

261. Dibuja tres paralelogramos distintos que tengan la misma área de  $12\text{cm}^2$  y todas las alturas iguales.  
*Draw three different parallelograms with area  $12\text{cm}^2$  and with equal heights.*

262. Dibuja tres paralelogramos distintos que tengan la misma área de  $12\text{cm}^2$  y diferentes alturas todas.  
*Draw three different parallelograms with area  $12\text{cm}^2$  and different heights.*

263. Dibuja un romboide de lados  $4\text{cm}$  y  $8\text{cm}$  con uno de los ángulos igual a  $120^\circ$ . Mide el resto de ángulos. Calcula el perímetro

de la figura. Traza las diagonales. Mide las diagonales. Calcula el área de uno de los triángulos interiores. Calcula el área del romboide.  
*Draw a rhomboid with side lengths  $4\text{cm}$  and  $8\text{cm}$  with one of its angles equal to  $120^\circ$ . Measure the rest of its angles. Calculate the perimeter of the figure. Plot the diagonals. Measure the diagonals. Calculate the area of one of the interior triangles. Calculate the area of the rhomboid.*

### PROBLEMAS DE OTROS CUADRILÁTEROS

264. En un estadio de fútbol cuatro amigos compran entradas para ver a la selección española pero, desgraciadamente, no consiguen sentarse juntos. Alberto está a  $12\text{m}$  de Samuel, ambos en la línea de la barandilla. Tres metros más abajo, al pie de la siguiente barandilla, están Tomás y Alfredo separados  $7\text{m}$  y formando con ellos un trapecio isósceles. Si Alberto extiende la mano izquierda en dirección a Samuel y la mano derecha en dirección a Tomás, ¿qué ángulo habrá entre ellas? ¿Y si la mano derecha la extendiese en dirección a Alfredo? ¿Cuántas localidades hay entre ellos si cada asiento ocupa aproximadamente  $0,75\text{m}^2$ ? Nota: para dibujar, toma los metros por centímetros.

*In a football stadium, four friends buy four tickets to see the Spanish national team, but, unfortunately, they cannot sit together. Alberto is sitting  $12\text{m}$  far from Samuel, both of them drawing a line with respect to the rail. Tomás and Alfredo are sitting three meters below, at the foot of the next rail, and they are  $7\text{m}$  far from each other, forming an isosceles trapezium. If Alberto holds out his left hand to Samuel and his right hand to Tomás, which angle can you distinguish between their hands? Which angle can you distinguish if Alberto holds out his right hand to Alfredo? How many seats are there among them if each seat is  $0.75\text{m}^2$  width? Note that to draw it you need to use centimetres where it says metres.*

265. Un complejo industrial tiene forma de rombo con las oficinas, el aparcamiento, el almacén y el restaurante en las esquinas. La planta de fabricación cuenta con  $2400\text{m}^2$  y se sitúa en el recinto interior. Dibuja fielmente la planta de la empresa sabiendo que entre las oficinas y el almacén hay  $80\text{m}$  y esa línea forma la diagonal mayor del rombo. ¿Cuánto mide el perímetro del complejo? Nota: toma los



80m como 8cm. Se espera que la diagonal menor la saques con cálculo mental usando tus conocimientos de las tablas de multiplicar.  
*An industrial complex has the shape of a rhombus being the offices, the car park, the store and the restaurant in the corners. The manufacturing plant is  $2400\text{m}^2$  and it is inside the building. Draw as accurately as possible the plan of the enterprise taking into account that between the offices and the store there are 80m and that line forms the major diagonal of the rhombus. What is the measure of the perimeter of the complex? Note that 8cm have to be used where it says 80m. You have to guess the measure of the minor diagonal using the multiplication tables.*

266. Un terreno rectangular tiene de largo 14m y de ancho 9m. En el centro se coloca una tarima también rectangular de 11m de larga por 6m de ancha. ¿Cuántos  $\text{Dam}^2$  de espacio quedan libres? Dibújalo fielmente. Nota: ayúdate de las diagonales de los rectángulos para centrar el dibujo y toma los metros por centímetros.

*A rectangular land is 14m long and 9m wide. In the middle, a rectangular dais of 11m long and 6m wide is placed. How many  $\text{Dam}^2$  are left unoccupied? Draw it as accurately as possible. Note that you should use the diagonals of the rectangles to centre the drawing and use centimetres where it says metres.*

267. Una pista polideportiva rectangular tiene de área  $36\text{m}^2$  y de base 90dm. Calcula el perímetro. Dibuja la situación fielmente.  
*A rectangular track in a sport centre has an area of  $36\text{m}^2$  and a base of 90dm. Calculate the perimeter. Draw the situation as accurately as possible.*

268. Una sala rectangular tiene de larga 9,8m y de ancha 7,6m. ¿Cuántas personas cabrán si cada una precisa aproximadamente  $1,4\text{m}^2$ ? Dibuja la situación fielmente.  
*Having a rectangular room of 9.8 m long and 7.6 m wide, how many people could there be if every person needs  $1.4\text{m}^2$  approximately? Draw this situation accurately.*

269. Pedro está en lo que él cree que es el centro de una finca que necesita medir. Ve los cuatro postes que delimitan el terreno a su frente, espalda, mano derecha y mano izquierda. Con un láser mide la

distancia a la que se encuentra de ellos, obteniendo los siguientes resultados: a su espalda el primer poste está a 60m, a la derecha el segundo poste está a 80m, al frente el tercer poste está a otros 60m y a su izquierda el cuarto poste está a otros 80m. Dibuja la situación fielmente (toma los 80m por 8cm y los 60m por 6cm). ¿Qué figura te ha salido? ¿Mide sus ángulos interiores? Calcula su superficie en hectáreas.

*Pedro thinks he is in the middle of the plot of land he needs to measure. He can see the posts which demarcate the land in his front, on his back, on his right and his left hand side. With a laser he measures the distance he is from the posts and he gets the following results: the post on his back is 60m far, the post on his right hand side is 80m far, the post in the front is 60m far and the post on his left hand side is 80m far. Draw the situation as accurately as possible (use 8cm where it says 80m and 6cm where it says 60m). What figure have you got? Measure its interior angles. Calculate its surface in hectares.*

270. Se quiere colocar un panel publicitario en la fachada Sur de una casa que se encuentra ubicada al lado de una carretera muy transitada. Se pide calcular la superficie de lona necesaria para fabricar el cartel sabiendo que esa fachada es el perfil de la casa y tiene forma de trapecio rectángulo “girado”: lados paralelos (paredes de la casa) de 3m y 5m, lado perpendicular de 4m. Dibuja la situación fielmente. ¿Cuántos metros tiene el agua del tejado? Calcula también los metros de cinta que se emplearán para bordear el panel.

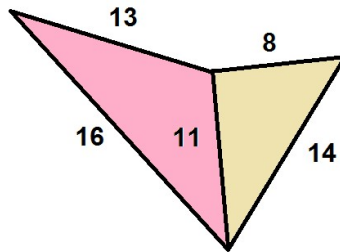
*A billboard wants to be placed on the South facade of a house which is located on the other side of a busy road. You have to calculate the area of canvas needed to make the billboard taking into account that the facade is the side of the house and it has a shape of a “turned” right trapezium whose parallel sides (the walls of the house) are 3m and 5m and whose perpendicular side is 4m. Draw the situation as accurately as possible. How many metres does the gable roof have? Calculate the metres of ribbon used to go along the billboard.*

271. La siguiente figura representa el solar de una piscina pública. El recinto se divide en dos zonas: a la izquierda piscina de mayores y



a la derecha piscina de pequeños. Con las medidas dadas en metros y usando la calculadora, calcula el área de cada sección (con la fórmula de Herón). ¿Qué superficie total tiene el recinto? Dibuja las alturas de los dos triángulos de la figura usando la escuadra.

*The following figure represents the plot of land of a public swimming pool. The swimming pool is divided into two areas: the swimming pool on the left for adults and the swimming pool on the right for children. With the measures given in metres and the calculator, calculate the area of each of the swimming pools using Heron's formula. What is the total area of the swimming pool? Draw the heights of the two triangles of the figure using the set square.*



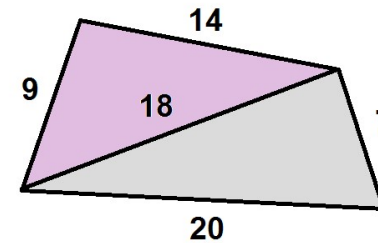
272. Unas costureras de redes de pesca han recibido una red cuadrangular con un lado de 3m formando por la derecha un ángulo de  $120^\circ$  con otro lado de 4,5m y formando por la izquierda un ángulo de  $90^\circ$  con otro lado de 5m. Se pide: a) dibujar fielmente la situación tomando los metros por centímetros; b) medir con la regla y el transportador el lado y ángulos que faltan; c) calcular el perímetro de la red de pesca; d) dibujar y medir con la regla las diagonales de la figura; e) calcular el área de la red por triangulación usando la fórmula de Herón.

*Translate.*

273. La siguiente figura representa la sala de juegos de un colegio. El recinto se divide en dos zonas: a la izquierda-arriba colchonetas y a la derecha-abajo banquetas. Con las medidas dadas en metros y usando la calculadora, calcula el área de cada sección (con la fórmula

de Herón). ¿Qué superficie total tiene el recinto? Dibuja las alturas de los dos triángulos de la figura usando la escuadra.

*The following figure represents the playroom of a school. The playroom is divided into two areas: the area on the left-top floor with mats and the area on the right-ground floor with stools. With the given measures in metres and using the calculator, calculate the area of each of the areas of the playroom using Heron's formula. What is the total area of the playroom? Draw the heights of the triangles of the figure using the set square.*



#### OTROS POLÍGONOS MORE POLYGONS

274. Dibuja con regla un pentágono siguiendo estas instrucciones: un lado de 5cm; a su derecha marca el primer vértice con la letra A; dibuja para abajo y haciendo un ángulo de  $120^\circ$  con el anterior, un segundo lado de 6cm; marca el segundo vértice con la letra B; pegado al lado de 6cm y formando otro ángulo de  $60^\circ$ , dibuja un tercer lado de 4cm; marca el tercer vértice con la letra C; pegado a este lado de 4cm y haciendo un ángulo de  $220^\circ$ , dibuja un cuarto lado de 7cm; marca el cuarto vértice con la letra D; por último, une los extremos que quedan libres y marca el quinto vértice con la letra E. Mide el quinto lado resultante. ¿Es esta una figura regular? ¿Cuánto miden los dos ángulos interiores que faltan? Traza las diagonales A-D y A-C. Mide esas diagonales. ¿Cuántos triángulos se han formado? Pinta cada uno de un color. Halla sus áreas usando la fórmula de Herón. Calcula el área del pentágono original sumando las tres áreas





triangulares coloreadas. Si la suma de los ángulos de cada uno de esos triángulos es  $180^\circ$ , ¿cuánto sumarán los ángulos del pentágono? *Follow these instructions to draw a pentagon: draw a side of 5cm; on its right mark the first vertex with the letter A; draw downwards and do an angle of  $120^\circ$  with the previous one, draw a second side of 6cm; mark the second vertex with the letter B; next to the side of 6cm and forming an angle of  $60^\circ$ , draw a third side of 4cm; mark the third vertex with the letter C; next to this side of 4cm and doing an angle of  $220^\circ$  draw a fourth side of 7cm; mark the fourth vertex with the letter D; finally, join the extremes that are left free and mark the fifth one with the letter E. Measure the fifth resulting side. Is this one a regular figure? What is the measure of the two missing angles? Draw the diagonals A-D and A-C. Measure those diagonals. How many triangles are formed? Paint each of them in a different colour. Find their areas using Heron's formula. Calculate the area of the original pentagon adding the three coloured triangular areas. If the addition of the angles of each of these triangles is  $180^\circ$ , what will the result of the addition of the angles of the pentagon be?*

275. Dibuja con regla un hexágono siguiendo estas instrucciones: un lado de 7cm; a su derecha marca el vértice A y dibuja para abajo haciendo un ángulo de  $130^\circ$  con el anterior, un segundo lado de 4cm; pegado a este último marca el vértice B dibuja otro lado de 4cm formando un ángulo de  $100^\circ$ ; marca el vértice C y dibuja un segmento de 7cm haciendo un ángulo de  $130^\circ$ ; marca el vértice D y dibuja otro segmento de 4cm haciendo con el anterior un ángulo de  $130^\circ$ ; por último, marca el vértice E y únelo al extremos que queda libre (vértice F). Mide la longitud del sexto lado resultante. ¿Es esta una figura regular? ¿Cuánto miden los dos ángulos interiores que faltan? Traza las tres diagonales A-C, A-D y D-F. ¿Cuántos triángulos se han formado? Pinta cada uno de un color. Traza y mide las alturas necesarias para hallar sus áreas por la fórmula de la altura. Calcula el área del hexágono original sumando las tres áreas triangulares. Si la suma de los ángulos de cada uno de esos triángulos es  $180^\circ$ , ¿cuánto sumarán los ángulos de este hexágono?

*Draw with a ruler a hexagon following these instructions: one side of 7cm; on its right mark the vertex A and draw downwards doing an angle of  $130^\circ$  with the previous one and draw a second side of 4cm; next to this last side mark the vertex B and draw another side of 4cm forming an angle of  $100^\circ$ ; mark the vertex C and draw a segment of 7cm doing an angle of  $130^\circ$ ; mark the vertex D and draw another line segment of 4cm doing an angle of  $130^\circ$  with the previous line segment; finally, mark the vertex E and join the extremes that are left free (vertex F). Measure the length of the sixth resulting side. Is this a regular figure? What is the measure of the two angles missing? Draw the three diagonals A-C, A-D and D-F. How many triangles are formed? Paint each of the triangles in a different colour. Draw and measure the necessary heights to find their areas using the formula of the height. Calculate the area of the original hexagon adding the three triangular areas. If the addition of the angles of each of those triangles is  $180^\circ$ , what is the result of the addition of this hexagon?*

276. Dibuja con regla un pentágono siguiendo estas instrucciones: un lado de 5m; a su derecha marca el primer vértice con la letra A; dibuja para abajo y haciendo un ángulo de  $90^\circ$  con el anterior, un segundo lado de 6cm; marca el segundo vértice con la letra B; pegado al lado de 6cm y formando otro ángulo de  $140^\circ$ , dibuja un tercer lado de 6cm; marca el tercer vértice con la letra C; pegado a este lado de 5cm y haciendo un ángulo de  $90^\circ$ , dibuja un cuarto lado de 5cm; marca el cuarto vértice con la letra D; por último, une los extremos que quedan libres y marca el quinto vértice con la letra E. Mide el quinto lado resultante. ¿Es esta una figura regular? ¿Cuánto miden los dos ángulos interiores que faltan? Traza las diagonales A-D y A-C. ¿Cuántos triángulos se han formado? Pinta cada uno de un color. Traza y mide las alturas necesarias para hallar sus áreas usando la fórmula de la altura. Calcula el área del pentágono original sumando las tres áreas triangulares coloreadas. Si la suma de los ángulos de cada uno de esos triángulos es  $180^\circ$ , ¿cuánto sumarán los ángulos del pentágono que acabas de dibujar?



*Draw with a ruler a pentagon using the following instructions: a side of 5m; on its right mark the first vertex with the letter A; draw downwards and doing an angle of  $90^\circ$  with the previous one, a second side of 6cm; mark the second vertex with the letter B; next to the side of 6cm and forming another angle of  $140^\circ$ , draw a third side of 6cm; mark the third vertex with the letter C; next to this side of 5cm and forming an angle of  $90^\circ$ , draw a fourth side of 5cm; mark a fourth vertex with the letter D; finally, join the extremes that are left free and mark the fifth vertex with the letter E. Measure the fifth resulting side. Is this a regular figure? What is the measure of the two interior angles missing? Draw the diagonals A-D and A-C. How many triangles are formed? Paint each of the triangles in a different colour. Draw and measure the necessary heights to find their areas using the formula of the height. Calculate the area of the original pentagon adding the three coloured triangular areas. If the addition of the angles of each of these triangles is  $180^\circ$ , what will be the result of the addition of the angles of the pentagon you have just drawn?*

277. Dibuja con regla un octógono siguiendo estas instrucciones: un lado de 3m; a su derecha marca el primer vértice con la letra A; dibuja para abajo y haciendo un ángulo de  $135^\circ$  con el anterior, un segundo lado de 3cm; marca el segundo vértice con la letra B; pegado al lado de 3cm y formando otro ángulo de  $135^\circ$ , dibuja un tercer lado de 3cm; marca el tercer vértice con la letra C; pegado a este lado de 3cm y haciendo un ángulo de  $135^\circ$ , dibuja un cuarto lado de 3cm; marca el cuarto vértice con la letra D; sigue este mismo proceso hasta que acabes la figura. ¿Es regular este polígono? Traza y mide su apotema que te servirá para hallar su área.

*Draw an octagon with a ruler following the instructions: a side of 3m; on its right mark the first vertex with the letter A; draw downwards and doing an angle of  $135^\circ$  with the previous one a second side of 3cm; mark the second vertex with the letter B; next to the side of 3cm and forming another angle of  $135^\circ$ , draw a third side of 3cm; mark the third vertex with the letter C; next to this side of 3cm and doing an angle of  $135^\circ$  draw a fourth side of 3cm; mark the vertex with the letter D; follow the same*

*process until you finish the figure. Is this a regular polygon? Draw and measure the apothem that it will be useful to find its area.*

278. Has aprendido que la suma de los ángulos interiores de un polígono de  $n$  lados es  $180^\circ \cdot (n-2)$ . Si el polígono es regular, además de tener todos los lados iguales también tiene todos los ángulos interiores iguales. Por tanto, ¿cuánto medirán cada uno de los ángulos interiores de un pentágono regular? ¿Y cada uno de los ángulos interiores de un hexágono regular? ¿Y de un heptágono regular?

*You have learnt that the addition of the interior angles of a polygon of  $n$  sides is  $180^\circ (n-2)$ . If the polygon is regular, apart from having all their sides equal, it also has all their interior angles equal. What will each of the interior angles of a regular pentagon measure? What will each of the interior angles of a regular hexagon measure? What will each of the interior angles of a regular heptagon measure?*

279. Hallando lo que miden cada uno de los ángulos interiores de un pentágono regular (divide  $180^\circ \cdot (n-2)$  entre los cinco ángulos del pentágono), dibuja con regla y transportador de ángulos el pentágono regular de lado 4cm. Calcula el perímetro de esta figura regular. Traza sus diagonales y observa su forma estrellada tan peculiar.

*Calculate the measure of each of the interior angles of a regular pentagon (divide  $180^\circ \cdot (n-2)$  by the five angles of a pentagon), draw with a ruler and protractor a regular pentagon with side length 4cm. Calculate the perimeter of this regular figure. Plot its diagonals and observe its star form.*

280. Hallando lo que miden cada uno de los ángulos interiores de un hexágono regular (divide  $180^\circ \cdot (n-2)$  entre los seis ángulos del pentágono), dibuja con regla y transportador de ángulos el hexágono regular de lado 5cm. Traza las diagonales y busca el centro del polígono. Dibuja la circunferencia circunscrita. Mide con regla su apotema. Calcula el perímetro y el área de esta figura regular.

*Calculate the measure of each of the interior angles of a regular hexagon (divide  $180^\circ (n-2)$  by the six angles of the pentagon) and draw with a*





*ruler and a protractor a regular hexagon with a side length 5cm. Plot the diagonals and find the centre of the polygon. Draw the circumscribed circumference. Measure with a ruler its apothem. Calculate the perimeter and the area of this regular figure.*

281. Dibuja un hexágono regular de lado 4cm usando únicamente el compás (ayudándote de la circunferencia circunscrita). Desde el centro de esa circunferencia, traza los lados de los seis triángulos equiláteros que se forman. Halla la apotema del hexágono, calcula su perímetro y su superficie.

*Draw a regular hexagon with a side length of 4cm. You may only use the compass (by helping yourself with the circumference of circle). Starting from the centre of this circumference, trace the sides of the six equilateral triangles that have been formed. Draw the apothem of this hexagon, calculate its perimeter and its surface area.*

282. Dibuja un hexágono regular de 3cm de lado. Traza la apotema y calcula el área.

*Draw a regular hexagon with side length 3cm. Draw the apothem and calculate its area.*

283. Dibuja un hexágono regular de 3,5cm de lado; mide la apotema y halla el área en  $\text{mm}^2$ .

*Draw a regular hexagon with side length 3.5cm; measure the apothem and calculate the area in  $\text{mm}^2$ .*

284. El perímetro de un heptágono regular mide 35cm. ¿Cuál será el lado? Dibuja con regla y transportador uno de los triángulos isósceles en los que se divide el heptágono desde su centro (necesitarás calcular la mitad de los ángulos interiores). Mide la apotema y calcula el área del heptágono original.

*The perimeter of a regular heptagon is 35cm. What will the measure of its side be? Draw with a ruler and a protractor one of the isosceles triangles in which the heptagon is divided from the centre (you need to calculate the half of the interior angles). Measure the apothem and calculate the area of the original heptagon.*

285. El perímetro de un pentágono regular mide 40cm. ¿Cuál será el lado? Dibuja con regla y transportador uno de los triángulos isósceles en los que se divide el pentágono desde su centro (necesitarás calcular la mitad de los ángulos interiores). Mide la apotema y calcula el área del pentágono original.

*The perimeter of a regular pentagon is 40cm. What will the measure of its side be? Draw with a ruler and a protractor one of the isosceles triangles in which the pentagon is divided from its centre (you need to calculate the half of the interior angles). Measure the apothem and calculate the area of the original pentagon.*

286. Dibuja un pentágono regular de lado 5,5cm usando el transportador de ángulos. ¿Cuál será su perímetro en dm?

*Draw a regular pentagon with side length 5.5cm using the protractor. What will its perimeter be in dm?*

287. Sigue las instrucciones siguientes para dibujar un octógono regular de lado 3cm: i) dibuja un cuadrado de lado 6cm; ii) traza las diagonales y señala el punto de corte (centro del cuadrado); iii) traza la circunferencia circunscrita al cuadrado (que tiene por radio la distancia desde el centro a un vértice); iv) traza las mediatrices a dos lados contiguos del cuadrado; v) dibuja el octógono con los ocho puntos que aparecen en la circunferencia.

*Use the following instructions to draw a regular octagon with side length 3cm: i) draw a square with side length 6cm; ii) draw its diagonals and mark the centre of the square; iii) draw the circumscribed circumference of the square. The circumference has as radius the distance from the centre to one of the vertexes; iv) draw the perpendicular bisector to two of the adjoining sides of the square; v) draw the octagon with the eight points that appear in the circumference.*

288. Dibuja con reglas y compás un octógono regular de perímetro 32dm. ¿Cuál será el lado en mm? Mide la apotema y calcula el área de esta figura regular.

*Draw with rulers and a compass a regular octagon with a perimeter of 32dm. Which of its sides can be measured in mm? Measure the apothem and calculate the area of this regular figure.*



### PROBLEMAS DE OTROS POLÍGONOS

289. Una familia de 6 miembros quiere hacer una mesa a medida donde todos tengan el mismo sitio para sentarse y estén igual de lejos del vol central. ¿Qué figura les propondrías? Dibújala sabiendo que las sillas ocupan 50cm. ¿Cuánta madera necesitarán para construir el tablero? Nota: en el dibujo, toma los 50cm por 5cm.

*A family of six members wants to make table where all of them can have the same space and be at the same distance from the centre. What figure would you use to make the table? Draw it taking into account that each of the chairs measures 50cm. How much wood do you need to build the top of the table? Note that you should use 5cm where it says 50cm.*

290. Una parcela poligonal está delimitada por una carretera (20m), una vía de servicio (40m), un primer vecino (30m), un segundo vecino (25m) y un parque. Dibuja la situación sabiendo que a la derecha de la carretera está la vía de servicio formando con ella un ángulo de  $105^\circ$ ; que a la derecha de la vía de servicio se encuentra el primer vecino formando un ángulo de  $120^\circ$ ; que a la derecha de ese vecino está el otro vecino formando un ángulo de  $60^\circ$ ; que el segundo vecino está unido al parque y el parque a la izquierda de la carretera. ¿Qué polígono se ha formado? ¿Cuánto mide la fachada del parque? ¿Cuánto valen los dos últimos ángulos interiores? Calcula el área de la parcela por triangulación usando la fórmula de Herón (para lo cual tendrás que medir dos diagonales). Para terminar, traza las alturas de los dos triángulos formados.

*A polygonal plot is delimited by a road (20m), a service road (40m), a first neighbour (30m), a second neighbour (25m) and a park. Draw the situation taking into account that the service road is on the right of the road forming an angle of  $105^\circ$ ; that the first neighbour is on the right of the service road forming an angle of  $120^\circ$ ; that the second neighbour is on the right of the first neighbour forming an angle of  $60^\circ$ , that the second neighbour is joined to the park and the park is on the left of the road. What is the polygon you have got? How much does the facade of the park measure? What is the value of the two last interior angles? Calculate the area of the plot by triangulation using Heron's formula (you will have to*

*measure the two diagonals). To finish, draw the heights of the triangles formed.*

291. Una empresa de eventos tiene una tarima cuadrada de 24m de lado que necesita convertir en un octógono. Se les ocurre dibujar y cortar de cada esquina un triángulo rectángulo isósceles de lado la tercera parte de los 24m. Dibuja la situación. ¿Qué superficie han perdido con el cambio? ¿Qué área tiene cada uno de los triángulos cortados?

*An event enterprise has a square dais with side length 24m and it needs to change it into an octagon. They have thought of drawing and cutting from each of the corners an isosceles right triangle whose side is the third part of the 24m. Draw the situation. What is the area they have lost with this change? What is the area of each of the cut triangles?*

### SIMETRÍAS SYMMETRIES RECUERDA

- @ Los triángulos equiláteros quedan divididos por cada altura (ejes de simetrías) en dos triángulos rectángulos iguales.
- @ Los triángulos isósceles quedan divididos por la altura del lado desigual (eje de simetría) en dos triángulos rectángulos iguales.
- @ Los triángulos rectángulos isósceles quedan divididos por la altura sobre la hipotenusa (eje de simetría) en dos triángulos rectángulos isósceles iguales => por lo tanto, la altura sobre la hipotenusa pasa justo por la mitad de la hipotenusa. ¡Qué chulo!
- @ Los cuadrados quedan divididos, trazando una de sus diagonales (eje de simetría), en dos triángulos rectángulos isósceles iguales.
- @ Los cuadrados quedan divididos, trazando las dos diagonales (que se cortan en perpendicular por sus puntos medios), en cuatro triángulos rectángulos isósceles iguales.
- @ Los rectángulos quedan divididos, trazando una de sus diagonales, en dos triángulos rectángulos iguales.
- @ Los rectángulos quedan divididos, trazando las dos diagonales (que se cortan por sus puntos medios), en cuatro triángulos isósceles iguales.



@ Los rombos quedan divididos, trazando una de sus diagonales (eje de simetría) en dos triángulos isósceles iguales.

@ Los rombos quedan divididos, trazando las dos diagonales (que se cortan en perpendicular por sus puntos medios) en cuatro triángulos rectángulos iguales.

#### REMEMBER

*@Equilateral triangles are divided by each height (symmetry axis) into two equal right triangles.*

*@Isosceles triangles are divided by the height of the unequal side (symmetry axis) into two equal right triangles.*

*@Right isosceles triangles are divided by the height of the hypotenuse (symmetry axis) into two equal right isosceles triangles => so the height of the hypotenuse goes just through the middle of the hypotenuse. Amazing!*

*@Squares are divided, drawing one of their diagonals (symmetry axis), into two equal isosceles right triangles.*

*@Squares are divided, drawing both of their diagonals (that are cut by their middle points in perpendicular), into four equal isosceles right triangles.*

*@Rectangles are divided, drawing one of their diagonals, into two equal right triangles.*

*@Rectangles are divided, drawing both of their diagonals (that are cut by their middle points), into four equal isosceles triangles.*

*@Rhombuses are divided, drawing one of their diagonals (symmetry axis) into two equal isosceles triangles.*

*@Rhombuses are divided, drawing both of their diagonals (that are cut by their middle points in perpendicular), into four equal right*

292. Dibuja un triángulo equilátero de lados 7,5cm. Traza cualquiera de las alturas y fíjate en los dos triángulos que aparecen nuevos, ¿de qué tipo son? Píntalos en dos colores distintos. ¿Pasará esto en todos los triángulos equiláteros? Calcula el área del triángulo original y, por simetría, de cada uno de los triángulos formados.

*Draw an equilateral triangle with side lengths 7.5cm. Draw any of its heights and pay attention to the two new resulting triangles, what kind of*

*triangles have you got? Paint them in two different colours. Do you think this happens in all the equilateral triangles? Calculate the area of the original triangle and the area of each of the triangles you have got using symmetry.*

293. Dibuja un triángulo isósceles de lados iguales 8cm y ángulo desigual 40°. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos? Traza la altura de uno de estos otros ángulos y fíjate si observas alguna simetría. Dibuja al lado el triángulo otra vez. Traza ahora la altura del ángulo de 40° y reflexiona sobre los dos triángulos que se forman nuevos, ¿de qué tipo son? Píntalos en dos colores distintos. ¿Pasará esto en todos los triángulos isósceles? Calcula el área del triángulo original y, por simetría, de cada uno de los triángulos formados.

*Draw an isosceles triangle with equal side lengths 8cm and with one unequal angle of 40°. What is the measure of the rest of the angles? Draw the height of one of these angles, can you see any symmetry? Draw the triangle next to this one again. Plot the height of the angle of 40° and observe the new triangles, what type of triangles are they? Paint them in two different colours. Do you think this happens in all the equilateral triangles? Calculate the area of the original triangle and the area of each of the triangles you have got using symmetry.*

294. Dibuja un cuadrado de lado 5cm y traza una diagonal. ¿Observas alguna simetría? ¿De qué tipo son los triángulos que se forman? Píntalos de colores distintos. Dibuja al lado otro cuadrado igual y traza las dos diagonales, ¿cómo son los cuatros triángulos que se forman? Píntalos de colores distintos y mide sus lados y ángulos. ¿Pasará esto en todos los cuadrados? Calcula el área del cuadrado original y, por simetría, de cada uno de los triángulos formados.

*Draw a square with side length 5cm and draw a diagonal. Can you see any symmetry? What type of triangles are formed? Paint them in different colours. Draw another square next to the first one and equal to the first one and draw the two diagonals, what kind of triangles are the ones you have got? Paint them in different colours and measure their sides and angles. Do you think this happens in all the squares? Calculate the area of*



*the original square and the area of each of the triangles you have got using symmetry.*

295. Dibuja un rectángulo de 7cm de ancho y 5,5cm de alto. Traza una diagonal. ¿Observas alguna simetría? ¿De qué tipo son los triángulos que se forman? Píntalos de colores distintos. Dibuja al lado otro rectángulo igual al anterior y traza las dos diagonales, ¿cómo son los triángulos que se forman? Píntalos de colores distintos y mide sus lados y ángulos. ¿Pasará esto en todos los rectángulos? Calcula el área del rectángulo original y, por simetría, de cada uno de los triángulos formados.

*Draw a rectangle of 7cm width and 5.5cm height. Draw a diagonal. Can you see any symmetries? What type of triangles are formed? Paint them in different colours. Draw another equal rectangle next to the previous one and draw the two diagonals, what triangles are formed? Paint them in different colours and measure their sides and angles. Will the same happen with all the rectangles? Calculate the area of the original rectangle and, by symmetry, each of the triangles formed.*

296. Dibuja un rombo de 7cm lado y uno de sus ángulos igual a  $35^\circ$ . Traza una diagonal. ¿Observas alguna simetría? ¿De qué tipo son los triángulos que se forman? Píntalos de colores distintos, mide sus lados y sus ángulos interiores. Dibuja al lado otro rombo igual al anterior y traza las dos diagonales, ¿cómo son los triángulos que se forman? Píntalos de colores distintos y mide sus lados y ángulos. ¿Pasará esto en todos los cuadrados? Calcula el área del rombo original y, por simetría, de cada uno de los triángulos formados.

*Draw a rhombus with side length 7cm and one of its angles equal to  $35^\circ$ . Draw a diagonal. Can you see any symmetries? What kind of triangles are formed? Paint them in different colours, measure their sides and their interior angles. Draw another rhombus equal to the previous one next to it and draw its diagonals, how are the triangles that are formed? Paint them in different colours and measure their sides and angles. Will the same happen in all the squares? Calculate the area of the original rhombus and, by symmetry, of each of the triangles formed.*

297. Dibuja un trapecio isósceles de bases 12cm y 10cm, con altura de 4cm. ¿Cuánto miden sus lados? Dibuja la mediatriz de la base mayor y observa las figuras que se forman a los lados, ¿de qué tipo son? Píntalas de distintos colores, mide sus lados y sus ángulos interiores. Calcula el área del trapecio original y, por simetría, de cada uno de los otros trapecios formados.

*Draw an isosceles trapezium whose bases are 12cm and 10cm and its height 4cm. What is the measure of its sides? Draw the perpendicular bisector of the major base and observe the figures formed on each of the sides. What type of figures are they? Paint them in different colours, measure their sides and their interior angles. Calculate the area of the original trapezium and, by symmetry, of each of the trapeziums formed.*

298. Dibuja un triángulo equilátero de lados 3cm. Compartiendo uno de sus lados, dibuja otro triángulo equilátero de lados 3cm. Sigue dibujando triángulos así hasta dar la vuelta completa. ¿Cuántos triángulos equiláteros has podido dibujar? ¿Qué figura has hecho? Calcula su área por simetría usando el triángulo equilátero original.

*Draw an equilateral triangle with side lengths 3cm. Sharing one of its angles, draw another equilateral triangle with sides of 3cm. Keep on drawing triangles until you have gone round. How many equilateral triangles have you drawn? Which figure have you got? Calculate the area using symmetry and using the original equilateral triangle.*

299. Dibuja un triángulo isósceles de base 5cm y altura 8cm usando sus simetrías. ¿Cuál es el eje de simetría? Halla el área del triángulo isósceles y, por simetría, de los dos triángulos rectángulos formados.

*Draw an isosceles triangle with a base of 5cm and height 8cm using its symmetries. What is its symmetry axis? Find the area of the isosceles triangle and of the two right triangles you have got using symmetry.*

300. Dibuja un trapecio isósceles de bases 15cm y 9cm con altura 3cm usando sus simetrías. ¿Cuál es el eje de simetría? Halla el área del trapecio completo y, por simetría, de su mitad.





*Draw an isosceles trapezium with bases of 15 and 9cm and with a height of 3cm using its symmetries. What is its symmetry axis? Find the area of the trapezium and of its half using symmetry.*

301. Dibuja, usando sus simetrías, un rombo de diagonales 9cm y 6cm. Halla su área y, por simetría, de cada uno de los triángulos formados (hay ocho). ¿Cuántos ejes de simetría tiene el rombo?

*Draw, using its symmetries, a rhombus whose diagonals are 9cm and 6cm. Find its area and the area of each of the triangles you have got (there are eight) using symmetry. How many symmetry axes does the rhombus have?*

302. Dibuja, usando sus simetrías, un cuadrado de diagonales 8cm. ¿Cuánto miden los lados? ¿Cuántos ejes de simetría tiene el cuadrado? Halla el área del cuadrado original y, por simetría, de cada una de los triángulos que se forman al cortarlo por los ejes de simetría.

*Draw, using its symmetries, a square whose diagonals are 8cm. What is the measure of its sides? How many symmetry axes does the square have? Using symmetry, find the area of the original square and the area of each of the triangles got when cutting it by the symmetry axes.*

303. ¿Podrías pintar un único triángulo de base 7cm y altura 5cm? ¿Por qué crees que pasa esto? Dibuja dos distintos.

*Can you draw a triangle with base 7cm and height 5cm? Why do you think this happens? Draw two different triangles.*

304. ¿Podrías pintar un único rectángulo de diagonales 8cm? ¿Por qué crees que pasa esto? Dibuja dos distintos.

*Can you draw a triangle whose diagonals are 8cm? Why do you think this happens? Draw two different triangles.*

305. Reflexiona si puedes o no dibujar exactamente con regla y compás un único romboide de diagonales 4cm y 6cm. En caso afirmativo, dibuja la única figura; en caso negativo, dibuja dos figuras para demostrar que no hay una sola.

*Can you draw a rhomboid whose diagonals are 4cm and 6cm with a ruler and a compass? If so, draw the figure; if it cannot be done, draw two figures to prove that there is not a single figure.*

306. Dibuja con regla y compás una figura simétrica de manera que quede un trapecio a cada lado del eje de simetría (0,25p). ¿De qué figura has partido y qué figura te ha salido? Mide todos los ángulos, lados y diagonales de la figura resultante.

*Translate.*

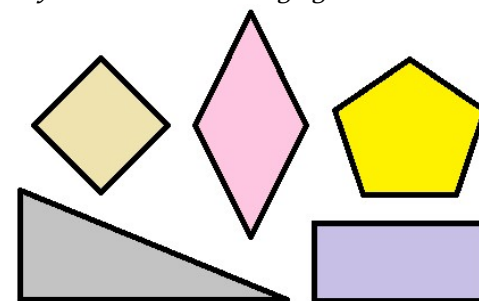
307. ¿Podrías pintar un único rectángulo de diagonal 5cm? En caso afirmativo, dibuja la única figura; en caso negativo, dibuja dos figuras para demostrar que no hay una sola. ¿Y un cuadrado de diagonal 5cm?

*Can you draw a rectangle whose diagonal is 5cm? If so, draw the figure; if it cannot be done, draw two figures to prove that there is not a single figure. Can you draw a square whose diagonal is 5cm?*

308. Dibuja un polígono de tu elección con un eje de simetría cuyo perímetro sea igual a 26cm. Consigna en el dibujo las medidas de todos sus lados y de todos sus ángulos. ¿Qué figura has elegido?

*Translate.*

309. Halla los ejes de simetría en las figuras siguientes: *Find the symmetry axes of the following figures:*



310. Lo mismo con:



311.

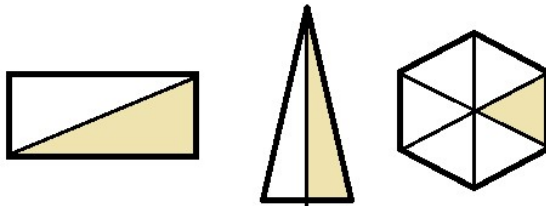
Lo mismo con:



312.

Calcula el área de las figuras sabiendo que los triángulos de color miden todos  $4\text{m}^2$ .

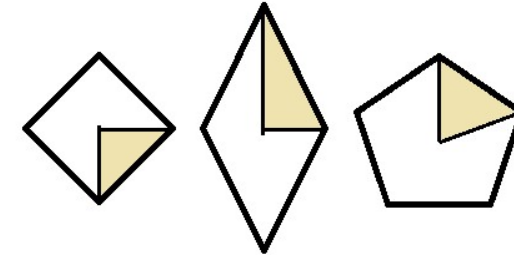
*Calculate the area of the figures taking into account that the all the triangles in colour measure  $4\text{m}^2$ .*



313.

Calcula el área de la figura grande sabiendo que los triángulos de color miden  $3\text{m}^2$  en todas las figuras.

*Calculate the area of the figures taking into account that the all the triangles in colour measure  $3\text{m}^2$ .*



**CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO**  
*CIRCUMFERENCE AND CIRCLE*



Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Cuál es la planta de casa más barata de construir? ¿Dónde se equivocó la reina Dido en el mito de la fundación de Cartago? ¿A qué se refieren los periodistas cuando dicen que un problema es como la cuadratura del círculo?

*Go to the website and look for the mathematical question: What is the cheapest ground plan to build? Where did queen Dido make a mistake in the myth of the funding of Carthage? What journalists refer when they say that a problem is like squaring the circle?*



### Posiciones relativas

#### Relative positions

314. Dibuja una circunferencia de radio 4cm y un segmento de recta de 6cm en las siguientes posiciones: a) recta secante a la circunferencia; b) recta exterior a la circunferencia; c) recta tangente a la circunferencia => traza el segmento desde el centro de la circunferencia y el punto de tangencia, ¿qué es este segmento para la circunferencia? ¿Qué ángulo hace con la recta tangente?

*Draw a circumference whose radius is 4cm and a straight line segment of 6cm in the following positions: a) a secant line to the circumference; b) an exterior straight line to the circumference; c) a tangent to the circumference – draw the line segment from the centre of the circumference and to the point of tangency, what is this segment line for the circumference? What angle does it form with the tangent?*

315. Dibuja dos circunferencias de radios 3cm y 5cm en las siguientes posiciones: a) exteriores; b) tangentes exteriores; c) secantes; d) tangentes interiores; e) interiores; f) concéntricas. Mide en cada caso la distancia entre sus centros. ¿Cuántos puntos tienen en común en cada caso?

*Draw two circumferences whose radiuses are 3cm and 5cm in the following positions: a) exterior lines; b) exterior tangents; c) secant lines; d) interior lines; e) interior lines; f) concentric lines. Measure the distance between its centres. How many points do they have in common in each of the cases?*

316. Dibuja dos circunferencias de radios 4cm y 6,5cm en las siguientes posiciones: a) exteriores; b) tangentes–exteriores; c) secantes; d) tangentes interiores; e) interiores; f) concéntricas. ¿Cuántos puntos tienen en común en cada caso? Calcula el área intermedia que queda entre las dos circunferencias dibujadas en el apartado e).

*Draw two circumferences whose radiuses are 4cm and 6.5cm in the following positions: a) exterior lines; b) exterior tangents; c) secant lines; d) interior lines; e) interior lines; f) concentric lines. How many points do they have in common in each of the cases? Calculate the area in between the figures in e).*

### Ángulos

#### Angles

317. Dibuja una circunferencia de 6cm de diámetro. Elige un punto cualquiera sobre la circunferencia. Desde allí, traza un ángulo inscrito de  $30^\circ$  y señala los dos puntos donde corta a la circunferencia al otro lado. Dibuja el triángulo con los tres puntos obtenidos. Une los dos últimos puntos con el centro de la circunferencia y mide el ángulo central formado. ¿Qué observas?

*Draw a circumference whose diameter is 6cm. Choose any point in the circumference. From there, draw an inscribed angle of  $30^\circ$  and mark the point where the circumference cuts the other side. Draw the triangle with the three points obtained. Join the two last points in the centre of the circumference and measure the central angle formed. What can you see?*

318. a) Dibuja una circunferencia de radio 5,5cm; b) dentro de ella, dibuja dos ángulos inscritos de  $90^\circ$  compartiendo el mismo arco; c) ¿qué ángulo central definen estos arcos? d) Averigua el área de la región que define este ángulo central.

*Translate.*

319. Dibuja sobre una circunferencia de radio 2cm dos ángulos inscritos de  $55^\circ$  compartiendo el mismo arco. ¿Cuánto vale el ángulo central definido?

*Draw on a circumference whose radius is 2cm two inscribed angles of  $55^\circ$  which share the same arc. What is the measure of the central angle?*





## Arco

### Arc

320. Traza una circunferencia de radio 3,5cm. Desde su centro, dibuja un arco de  $180^\circ$ . ¿Qué fracción de circunferencia has tomado? Calcula la longitud de ese arco utilizando la fracción adecuada. Calcula también el sector circular formado.

*Draw a circumference whose radius is 3.5cm. From its centre, draw an arc of  $180^\circ$ . What is the fraction of circumference that you have used? Calculate the length of this arc using the most suitable fraction. Calculate the circular sector formed.*

321. Traza una circunferencia de radio 4cm. Desde su centro, dibuja un arco de  $120^\circ$ . ¿Qué fracción de circunferencia has tomado? Calcula la longitud de ese arco utilizando la fracción adecuada. Calcula también el sector circular formado.

*Draw a circumference whose radius is 4cm. From its centre, draw an arc of  $120^\circ$ . What is the fraction of circumference you have used? Calculate the length of this arc using the most suitable fraction. Calculate the circular sector formed.*

322. Traza una circunferencia de radio 4cm. Desde su centro, dibuja un arco de  $72^\circ$ . ¿Qué fracción de circunferencia has tomado? Calcula la longitud en mm de ese arco utilizando la fracción adecuada. Calcula también el área en  $\text{dm}^2$  del sector circular formado.

*Draw a circumference whose radius is 4cm. From its centre, draw an arc of  $72^\circ$ . What is the fraction of circumference you have used? Calculate the length of this arc using the most suitable fraction. Calculate the circular sector formed in  $\text{dm}^2$ .*

## Sectores

### Sectors

323. Dibuja el sector circular de  $45^\circ$  y radio 4cm.

*Draw the circular sector of  $45^\circ$  and 4cm of radius.*

324. Dibuja el sector circular resultado de partir el círculo de radio 3,5cm en 6 partes iguales. ¿Cuántos  $\text{mm}^2$  representa esa porción? ¿Qué ángulo has empleado? ¿Qué arco se ha formado?

*Draw the circular sector obtained when dividing the circled into 6 equal parts with a radius of 3.5cm. How many  $\text{mm}^2$  are there in that portion? What angle have you used? What arc has been formed?*

325. Dibuja el sector circular resultado de partir el círculo de radio 5cm en 12 partes iguales. ¿Cuántos  $\text{m}^2$  representa esa porción? ¿Qué ángulo has empleado? ¿Qué arco se ha formado?

*Draw the circular sector obtained when dividing the circle into 12 equal parts with a radius of 5cm. How many  $\text{m}^2$  are there in that portion? What angle have you used? What arc has been formed?*

326. Dibuja el sector circular resultado de partir el círculo de radio 6cm en 18 partes iguales. ¿Cuántos  $\text{dm}^2$  representa esa porción? ¿Qué ángulo has empleado? ¿Qué arco se ha formado?

*Draw the circular sector obtained when dividing the circle into 18 equal parts with a radius of 6cm. How many  $\text{dm}^2$  are there in that portion? What angle have you used? What arc has been formed?*

327. Dibuja el sector circular resultado de partir el círculo de radio 45mm en 5 partes iguales. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  representa esa porción? ¿Qué ángulo has empleado? ¿Qué arco se ha formado?

*Draw the circular sector obtained when dividing the circle in 5 equal parts with a radius of 45mm. How many  $\text{cm}^2$  are there in that portion? What arc has been formed?*

328. Dibuja el sector circular resultado de partir el círculo de radio 0,7dm en 3 partes iguales. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  representa esa porción? ¿Qué ángulo has empleado? ¿Qué arco se ha formado?

*Draw the circular sector obtained when dividing the circle in 3 equal parts with a radius of 0.7dm. How many  $\text{cm}^2$  are there in that portion? What arc has been formed?*

## Problemas

### Problems

329. Una tienda de regalos está preparando un pedido de 103 cajas redondas rellenas de sorpresas. Si las cajas tienen 15cm de diámetro y se les enrolla alrededor un lazo azul o rosa decorativo,



¿cuántos metros de lazo necesitará la tienda? Si el lazo sale a 50 céntimos el m, ¿cuánto se gastarán en él?

*A shop of presents is preparing an order of 103 circular boxes filled with surprises. If the boxes have a diameter of 15cm and a pink or blue ribbon is tied around to decorate them, how many metres of ribbon does the shop need? If the ribbon costs 50 cents per meter, how much does the shop spend in the ribbon?*

330. Una pista de circo tiene de radio 22m, en el centro hay una jaula circular de 14m de radio. ¿Qué espacio en  $\text{dam}^2$  queda libre?  
*A circus ring has a radius of 22m and in the middle there is a circular cage with a 14m radius. What are the  $\text{dam}^2$  that are left free?*

331. ¿Cuál será la superficie de un paseo alrededor de un estanque circular de radio 75m si el ancho del paseo es 25m?  
*What is the surface of a promenade around a circular pond with 75m of radius if the width of the promenade is 25m?*

332. ¿Cuál será la anchura de una pista circular limitada por dos circunferencias concéntricas de radios 70m y 95m? ¿Qué superficie abarca?  
*What is the width of a circular ring that is limited by two concentric circumferences with radius 70m and 95m? What is the surface it covers?*

333. El cierre de una carretera ha ocasionado que el terreno donde se ubicaba una rotonda (circular) de 20m de diámetro se quiera dividir en tres sectores iguales para destinarlos a diferentes usos. Dibuja fielmente la situación. ¿Cuántos  $\text{dm}^2$  representa cada sector? ¿Qué ángulo has empleado? ¿Cuánto miden cada uno de los tres arcos formados?

334. El coso de la plaza de toros de un pueblo tiene un diámetro de 50m. Si las gradas tienen un ancho de 20m, ¿qué diámetro tiene la plaza de toros realmente? ¿Cuántas localidades se pueden vender si cada sitio ocupa  $0,50\text{m}^2$ ?  
*The bullring of a village has a diameter of 50m. If the stands of the bullring have a width of 20m, what is the real diameter of the bullring? How many tickets can be sold if each seat measures  $0.50\text{m}^2$ ?*

335. Una rotonda está construida con una fuente central circundada por una acera de 1m de ancha. ¿Qué diámetro tiene la fuente si el área que ocupa es de  $9\pi\text{m}^2$ ? ¿Qué superficie total construida tiene la rotonda?

*A roundabout has a fountain the middle which is surrounded by a pavement which is 1m width. What is the diameter of the fountain if it covers an area of  $9\pi\text{m}^2$ ? What is total built surface of the roundabout?*

336. En una tienda de bebés hacen tartas de pañales con dos pisos de diámetros 30cm y 20cm. Cada piso se rodea de una cinta decorativa y se cubre con una blonda de encaje. ¿Qué longitud de cinta se empleará? ¿Cuánta blonda se verá teniendo en cuenta que los pisos van uno encima del otro?

*In a baby shop they make cakes with nappies. These cakes have two layers with 30cm and 20cm of diameter. Each layer has a decorative ribbon surrounding it and it is covered with blond. What will be length of the ribbon to be used? How much blond will be seen taking into account that one layer goes on top of the other?*

337. Un arenero cuadrado de 16m de lado tiene colocado en el centro un tiovivo circular de radio 5m. ¿Qué espacio ocupa el tiovivo? ¿Qué superficie libre de arenero queda en  $\text{dam}^2$ ?

*A square sandy area with side length 16m has a circular merry-go-round with 5m radius in the middle. What is the space covered by the merry-go-round? What is the surface in  $\text{dam}^2$  that is left free?*

338. ¿Cuántos metros de acero necesita un herrero para bordear las cuatro ruedas de un carro de madera? Si al terminar con cada rueda el herrero las va tumbando y las cubre con una lona de su tamaño exacto, ¿cuánta lona emplea para esta tarea? Nota: cada rueda tiene 1,5m de diámetro.

*How many metres of steel does a blacksmith need to border the four wheels of a wooden cart? If after finishing each of the wheels the blacksmith lays the wheels down and he covers them with canvas of their right size, how much canvas is used for this task? Note that each wheel has 1.5m of diameter.*



339. En una bandeja cuadrada de 50cm de lado he desmoldado un pastel redondo de 50cm de diámetro. ¿Qué espacio queda en las esquinas de la bandeja para decoración con gominolas?

*I have turned a circular cake with a diameter of 50cm out in a square tray with 50cm of side. What is the space left between the corners of the tray to be decorated with fruit jellies?*

340. Jahel tiene en el laboratorio cuatro pliegos de papel de filtro de 60cmx80cm que va a recortar en círculos de 12cm de diámetro. Si necesita en total cien círculos, ¿le sobraré papel o le faltará? ¿Qué superficie de papel de filtro tiene Jahel? ¿Qué superficie habrá entre todos los círculos?

*In the laboratory, Jahel has four sheets of paper to make filters which measure 60cm width and 80cm height and she is going to cut them into circles of 12cm of diameter. If she needs a hundred circles, will she have enough paper? What area of filter paper does Jahel have? What area will there be taking into account all the circles?*

341. La cancha de baloncesto de un pueblo se ha habilitado para una fiesta de niños. A tal fin, se ha colocado una gigantesca cama elástica circular en el centro. El área sobrante de la pista, se va a tapar con un montón de colchonetas como medida de precaución en caso de caídas. ¿Qué superficie abarcan las colchonetas si la cancha de baloncesto es de 26mx15m y la cama elástica tiene un radio de 70dm? Dibuja la situación aproximadamente.

*The basketball court of a village has been fitted out for a children party. With that aim, a gigantic circular trampoline has been placed in the middle. The rest of the area of the court is going to be covered with lots of mats as a precautionary measure in case of somebody falling. What is the area occupied by the mats if the basketball court measures 26m height and 15m width and the trampoline has a radius of 70dm? Draw the situation as accurately as possible.*

**DIBUJO FIGURA INSCRITA**  
**DRAWING INSCRIBED FIGURES**

342. Dibuja un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 5cm. Traza y mide su apotema. Halla el área del hexágono y el área que queda en la región circular fuera del hexágono.

*Draw a regular hexagon inscribed in a circumference with a radius of 5cm. Plot and measure its apothem. Find the area of the hexagon and the area that is left in the circular region outside the hexagon.*

343. Dibuja un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 65mm. Halla el área del recinto entre el triángulo y la circunferencia (mide las distancias que necesites con regla).

*Draw an equilateral triangle inscribed in a circumference with a radius of 65mm. Find the area of the space between the triangle and the circumference (measure the distance you need with a ruler).*

344. Dibuja un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 7cm. Halla el área de cada una de las cuatro porciones sobrantes entre la circunferencia y el cuadrado.

*Draw a square inscribed in a circumference with a radius of 7cm. Find the area of each of the four portions left between the circumference and the square.*

345. Dibuja un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 4,5cm. ¿Cuánto vale la apotema de este polígono? Halla su área. Calcula el área entre el octógono y el cuadrado que se formaría.

*Draw a regular octagon inscribed in a circumference with a radius of 4.5cm. What is the value of the apothem of this polygon? Find its area. Calculate the area between the octagon and the square.*

346. Dibuja con regla y compás un hexágono regular de lado 2,5cm inscrito en una circunferencia. ¿Cuál será el perímetro en m? Calcula el área en dm<sup>2</sup> usando la fórmula de Herón para los lados de un triángulo. ¿Cuántos triángulos se han formado y de qué tipo son?

*Draw with ruler and compass a regular hexagon with side 2.5cm inscribed in a circumference. What is the perimeter in m? Calculate the area in dm<sup>2</sup> using Heron's formula for the sides of the triangle. How many triangles have you got and what kind of triangles have you got?*



347. Dibuja con regla y compás un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 7,5cm. Mide con regla su lado y apotema. Calcula la diferencia de perímetros entre las dos figuras.

*Translate.*

348. Dibuja un octógono inscrito en una circunferencia de radio 8cm. Mide su lado con regla. Mide su apotema con regla.

*Draw an octagon inscribed in a circumference of radius 8cm. Measure its side with the ruler. Measure its apothem with the ruler.*

### PROBLEMAS COTIDIANOS COMMON PROBLEMS

349. En un campo de forma triangular, la base mide 1.325m y la altura 860m. Se han plantado los  $\frac{3}{5}$  de maíz y el resto de patatas. ¿Qué superficie corresponde a cada cultivo?

*The base of a triangular land measures 1.325m and the height is 860m.  $\frac{3}{5}$  of the land has been planted with corn and the rest with potatoes. What is the area corresponding each of the crops?*

350. ¿Qué superficie mide un parterre cuadrado de 2m de lado? Si alrededor se quiere plantar un rosal cada 25cm. Dibuja la situación. ¿Cuántos se necesitarán? Si cada rosal cuesta 7€, ¿cuál es el presupuesto en rosales?

*What is the measure of the area of a square parterre of 2m side? If a rosetree wants to be planted each 25cm around the parterre. How many rosetrees will be needed? If each rosetree costs 7€. What is the budget for the rosetrees? Draw the situation.*

351. Una fachada rectangular de altura 18,5m y de anchura 9m, se quiere pintar a 29,45€/m<sup>2</sup>. Si hay 16 ventanas de 1,40mx1,10m. ¿Cuál es la superficie total a pintar? ¿Cuánto costará hacerlo?

*A rectangular facade with 18.5m height and 9m width costs 29.45€/m<sup>2</sup> to be painted. If there are 16 windows of 1.40mx 1.10m, what is the total area to be painted? How much will it cost?*

352. Si se quiere vallar todo alrededor una finca cuadrada de 70m de lado. Dibuja la situación. ¿Cuántos metros de malla se necesitan?

Si la malla se paga a 11€/m totalmente instalada, ¿cuánto se gastará en vallar la finca? ¿Qué superficie total tiene la propiedad en dm<sup>2</sup>?

*If a square plot of land with a side of 70m wants to be fenced, how many metres of wire netting are needed? If the wire netting costs 11€/m when is completely put, how much will be spend in fencing the plot of land? What is the total area of the property in dm<sup>2</sup>?*

353. El dosel de una cama está cosido con cuatro triángulos isósceles iguales de bases 1m y lados 2m. Dibújalo. ¿Cuánta tela se ha necesitado para coserlo? Si el precio del tejido asciende a 20€/m<sup>2</sup> y la costurera ha cobrado 30€, ¿cuánto dinero se ha pagado por el dosel?

*The canopy of a bed is sewn by four equal isosceles triangles whose bases are 1m and whose sides are 2m. How much cloth will be needed to sew it? If the price of the cloth is 20€/m<sup>2</sup> and the seamstress has been paid 30€, how much money has been paid for the canopy?*

354. Un solar público triangular se quiere dedicar a pista de patinaje, para lo cual se ha de encementar y vallar. Si los laterales de la pista miden 14m, 11m y 0,9dam, halla los metros de malla que se necesitan y la superficie a cubrir de cemento. Dibuja la situación y mide los ángulos que se forman en las esquinas. Si la malla cuesta 12€/m, ¿Cuál es el presupuesto para vallar? Si la empresa encargada del cemento cobra 15€/m<sup>2</sup>, ¿Cuál es el presupuesto para encementar?

*A public triangular plot wants to be used as a skating ring, in order to do so, it has to be cemented and fenced. If the laterals of the ring measure 14m, 11m and 0.9dam, find the metres of wire netting needed and the area to be cemented. Draw the situation, measure the angles that are formed in the corners. If the wire netting costs 12€/m, what is the budget to fence it? If the enterprise in charge of cementing it charges 15€/m<sup>2</sup>, what is the budget to cement it?*

355. Una inmobiliaria quiere colocar una pancarta ofertando sus casas. Se pide calcular la superficie de lona necesaria para fabricarla sabiendo que tendrá forma de paralelogramo de lados 5m y 3m con un ángulo igual a 60°. Dibuja la situación. Calcula también los metros



de cinta que se emplearán para bordear el panel. ¿Cuánto costará la pancarta si se cobrará 30€/m<sup>2</sup> ya terminada?

*An estate agent's wants to place a banner to offer its houses. Calculate the area of canvas needed to make it taking into account that it will have the shape of a parallelogram with sides 5m and 3m and an angle equal to 60°. Draw the situation. Calculate the metres of ribbon which will be used to border the banner. How much will the banner cost if it costs 30€/m<sup>2</sup> once finished?*

356. La tarta de boda más popular de una pastelería tiene tres pisos de diámetros 50cm, 35cm y 20cm. Cada ración son 50cm<sup>2</sup> de tarta y cuesta 1,5€. ¿Cuánto cuesta esta tarta de boda?

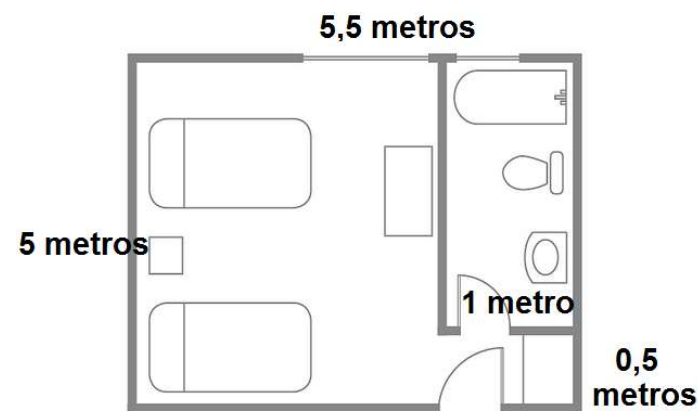
*The most popular wedding cake in a cake shop has three layers with diameter 50cm, 35cm and 20cm. Each portion of cake is 50cm<sup>2</sup> and costs 60 cents. How much does the wedding cake cost?*

357. Una cometa está cosida en forma de triángulo isósceles de base 2m y altura 4m. Dibújala. ¿Cuánta tela se ha necesitado para coserla? ¿Y cinta para bordearla (mide el lado con regla)? Si el precio del tejido asciende a 21€/m<sup>2</sup>, la cinta 7€/m y la costurera ha cobrado 18€, ¿cuánto dinero se ha pagado por la cometa?

*A kite is sewn in isosceles triangle form with base 2m and height 4m. How much cloth is needed to be sewn? How much ribbon is needed to border it (measure the side with a ruler)? If the price of the cloth is 21€/m<sup>2</sup>, the ribbon 7€/m and the seamstress has been paid 18€, how much money has been paid for the kite?*

358. Un albañil prepara un presupuesto para alicatar el suelo de un baño y el suelo de una habitación. Si el baño lo cobra a 45€/m<sup>2</sup> y la habitación a 30€/m<sup>2</sup>, ¿cuál es el valor del presupuesto?

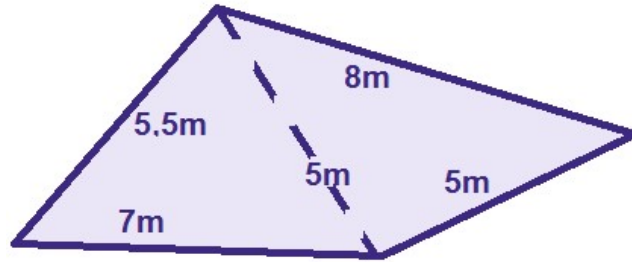
*A builder gives an estimate to tile the floor of a toilet and the floor of a room. If he charges 45€/m<sup>2</sup> for the toilet and 30€/m<sup>2</sup> for the room, what is the value of the estimate?*



359. El tejado de un palacio está hecho a cuatro aguas (vertientes o partes) mirando a los cuatro puntos cardinales. Todas las aguas son iguales y tienen forma de trapecio isósceles de altura 40m y bases 120m y 60m. a) Dibuja fielmente uno de estos trapecios. Las aguas se unen unas a otras por los lados iguales de los trapecios. b) ¿Cuánto miden estos lados iguales? c) ¿Qué área total tiene el tejado? d) ¿Cuántas tejas habrá colocadas entre todas las aguas si se sabe que en cada m<sup>2</sup> de tejado caben 25 tejas?

360. El administrador de una comunidad de propietarios propone vender una esquina infrautilizada como local comercial. Los propietarios solo aceptarán si la venta se efectúa por un valor superior a los 30.000€. Sabiendo que el m<sup>2</sup> de terreno en aquella zona se paga a 600€, ¿crees que los propietarios venderán o que, por el contrario, se negarán a vender? Nota: el dibujo siguiente **no** se ha hecho fielmente, por lo que no se pueden tomar medidas en él (es decir, que la superficie se tiene que calcular con la fórmula de Herón).





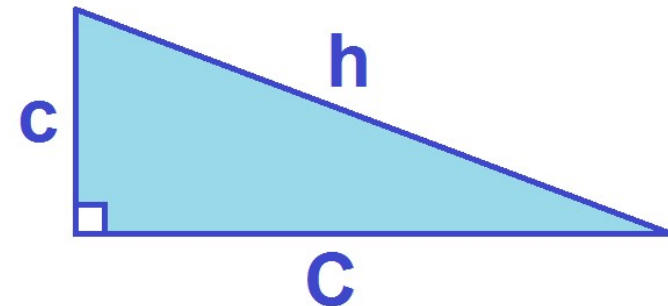
361. Para el inicio de las fiestas de Navidad, el ayuntamiento está preparando una pancarta rectangular de felicitación que expondrá en la entrada del pueblo atada a sendas farolas a los lados de la calle principal. Si sabemos que la calle mide 8m de ancha y la diagonal de la pancarta mide 10m, se pide lo siguiente: a) dibuja fielmente la situación; b) mide el ancho de la pancarta; c) halla la superficie de lona que se necesita para fabricar la pancarta; d) si la confección de la pancarta cuesta a razón de 33€/m<sup>2</sup>, calcula el precio que pagará el ayuntamiento por ella; e) si la pancarta se rodea de un cordón grueso dorado de 45€/m, ¿cuánto costará este detalle navideño?
362. Una red de pesca con forma romboidal de lado 7m y ángulo mayor 100°, tiene un agujero central de 3m de diámetro. a) Dibuja fielmente el estado de la red. b) ¿Qué perímetro tiene el agujero? c) ¿Qué superficie de red queda (descontando obviamente el agujero)? d) ¿Cuánto tiempo les llevará a las costureras arreglar el agujero si tardan seis horas por cada m<sup>2</sup> que tejen?

Con Pitágoras  
With Pythagoras

**INTRODUCCIÓN.** Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Se cumple siempre el teorema de Pitágoras?



RECUERDA



**TEOREMA DE PITÁGORAS (para triángulos rectángulos):**  $h^2 = C^2 + c^2$

@ Si se cumple que  $h^2 = C^2 + c^2 \Rightarrow$  el triángulo es RECTÁNGULO.

@ Si se cumple que  $h^2 > C^2 + c^2 \Rightarrow$  el triángulo es OBTUSÁNGULO.

@ Si se cumple que  $h^2 < C^2 + c^2 \Rightarrow$  el triángulo es ACUTÁNGULO.

363. ¿Es el triángulo de lados 12cm, 9cm y 15cm un triángulo rectángulo?

*Is the triangle with sides length 12cm, 9cm and 15cm a right triangle?*

364. ¿Es el triángulo de lados 6cm, 10cm y 13cm un triángulo rectángulo?

*Is the triangle of sides length 6cm, 10cm and 13cm a right triangle?*

365. ¿Es el triángulo de lados 3cm, 4cm y 5cm un triángulo rectángulo?



*Is the triangle of sides length 3cm, 4cm and 5cm a right triangle?*

366. ¿Es el triángulo de lados 7cm, 5cm y 10cm un triángulo rectángulo?

*Is the triangle of sides length 7cm, 5cm and 10cm a right triangle?*

367. ¿Es el triángulo de lados 8cm, 11cm y 16cm un triángulo rectángulo?

*Is the triangle of sides length 8cm, 11cm and 16cm a right triangle?*

368. ¿Es el triángulo de lados 1,5cm, 2cm y 2,5cm un triángulo rectángulo?

*Is the triangle of sides length 1.5cm, 2cm and 2.5cm a right triangle?*

369. ¿Es el triángulo de lados 3,5cm, 6,5cm y 4cm un triángulo rectángulo?

*Is the triangle of sides length 3.5cm, 6.5cm and 4cm a right triangle?*

370. ¿Es el triángulo de lados 7,5cm, 4,5cm y 6cm un triángulo rectángulo?

*Is the triangle of side length 7.5cm, 4.5cm and 6cm a right triangle?*

#### RECUERDA CÓMO DESPEJAR EN PITÁGORAS

(ayúdate de la calculadora para hacer las raíces cuadradas)

$$\begin{array}{lll} h^2 = c^2 + c^2 & h^2 - c^2 = c^2 & h^2 - c^2 = c^2 \\ h = \sqrt{c^2 + c^2} & c = \sqrt{h^2 - c^2} & c = \sqrt{h^2 - c^2} \end{array}$$

371. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 7cm y 24cm.

*Find out the hypotenuse in a right triangle whose cathetus' sides length is 7cm and 24cm.*

372. Halla el cateto que falta en un triángulo rectángulo de lados 5m y 13m.

*Find out the missing cathetus in a right triangle with sides length 5m and 13m.*

373. Halla el cateto que falta en un triángulo rectángulo de lados 21dm y 29dm.

*Find out the missing cathetus in a right triangle with sides length 21dm and 29dm.*

374. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2,8cm y 4,5cm.

*Find out the hypotenuse in a right triangle whose cathetus' sides length is 2.8cm and 4.5cm.*

375. Halla el cateto que falta en un triángulo rectángulo de lados 0,9m y 4,1m.

*Find out the missing cathetus in a right triangle with sides length 0.9m and 4.1m.*

376. Halla el cateto que falta en un triángulo rectángulo de lados 1,5cm y 1,7cm.

*Find out the missing cathetus in a right triangle with sides length 1.5cm and 1.7cm.*

#### CULTURA GENERAL

##### Ternas pitagóricas primitivas (a, b, c) con c<100

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)	(8, 15, 17)
(9, 40, 41)	(11, 60, 61)	(12, 35, 37)	(13, 84, 85)
(16, 63, 65)	(20, 21, 29)	(28, 45, 53)	(33, 56, 65)
(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(48, 55, 73)	(65, 72, 97)

Las llamamos primitivas porque su máximo común divisor es 1 (los tres números implicados son coprimos). A partir de estas ternas, podemos obtener infinitas otras multiplicando o dividiendo por cualquier valor. Por ejemplo: (6, 8, 10)...

Con Pitágoras  
With Pythagoras

RECUERDA DE 1º ESO



POLÍGONOS		
POLÍGONO	CARACTERÍSTICAS	ÁREA o SUPERFICIE
TRIÁNGULOS	El triángulo es el polígono de tres lados. Existen dos clasificaciones. Según sus lados: equilátero (tres lados iguales), isósceles (dos lados iguales y uno desigual) y escaleno (tres lados distintos). Según sus ángulos: acutángulo (los tres ángulos agudos), rectángulo (un ángulo recto) y obtusángulo (un ángulo obtuso). El equilátero es el triángulo regular (lados iguales y ángulos de 60°).	$\text{FÓRMULA DE LA ALTURA} \Rightarrow \text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = s \cdot \frac{h}{2}$ $\text{FÓRMULA DE HERÓN} \Rightarrow \text{Área} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ $\text{siendo } s \text{ el semiperímetro } s = \frac{\text{Perímetro}}{2} = \frac{a+b+c}{2}$
CUADRILÁTEROS	CUADRADOS	$\text{Área} = \text{Lado}^2 = l^2$
	ROMBOS	$\text{Área} = \frac{\text{Diagonal}_{\text{Mayor}} \cdot \text{Diagonal}_{\text{Menor}}}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$
	RECTÁNGULOS	$\text{Área} = \text{Lado}_{\text{grande}} \cdot \text{Lado}_{\text{pequeño}} = a \cdot b$
	ROMBOIDES	$\text{Área} = \text{Base} \cdot \text{Altura} = b \cdot h$
	TRAPECIOS	$\text{Área} = \frac{(\text{Base}_{\text{Mayor}} + \text{Base}_{\text{Menor}}) \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$
POLÍGONOS REGULARES (n lados)	Un polígono es regular cuando todos sus lados y todos sus ángulos son iguales. Los polígonos regulares tienen un punto (centro del polígono) desde donde se trazan sus apotemas (rectas en perpendicular a los lados).	$\text{Área} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$
POLÍGONOS NO REGULARES	POR TRIANGULACIÓN $\Rightarrow$ se descompone la figura de n lados en n-1 triángulos y se calculan las áreas parciales con HERÓN.	

### RECUERDA

**IMPORTANTE:** en los triángulos rectángulos, si tomamos un cateto como base, el otro cateto será la altura.

### REMEMBER

**IMPORTANT in right triangles:** if one of the cathetus is meant to be the base of the triangle, the other cathetus will be the height.

Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca  $\Rightarrow$  ¿Se cumple siempre el teorema de Pitágoras?



377. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 40cm y 30cm. Calcula su área. ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa? Nota: despégala en la fórmula del área conocida.  
*Find out the hypotenuse in a right triangle whose cathetus' sides length is 40cm and 30cm. Calculate its area. What is the measurement of the height on the hypotenuse? Note: isolate it from the area formula.*
378. Halla el cateto que falta en un triángulo rectángulo de lados 25m y 15m. Calcula su superficie en cm<sup>2</sup>. ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa? Nota: despégala en la fórmula del área conocida.  
*Find out the missing cathetus in a right triangle with sides length 25m and 15m. Calculate its area in cm<sup>2</sup>. What is the measurement of the height on the hypotenuse? Note: isolate it from the area formula.*
379. Halla el cateto que falta en un triángulo rectángulo de lados 21dm y 35dm. Calcula su área en m<sup>2</sup>. ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa? Nota: despégala en la fórmula del área conocida.  
*Find out the missing cathetus in a right triangle with sides length 21dm and 35dm. Calculate its area in m<sup>2</sup>. What is the measurement of the height on the hypotenuse? Note: isolate it from the area formula.*
380. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que el cateto pequeño mide 5cm y el cateto grande mide el doble que el pequeño. Calcula su superficie. Dibuja el triángulo fielmente y traza la altura sobre la hipotenusa. Mídela con regla y comprueba el resultado con el que hallas despejando en la fórmula del área conocida.



Find out the hypotenuse in a right triangle taking into account that the short cathetus is 5cm and the long one measures twice the short cathetus' length. Calculate its area. Draw the triangle and trace the height on the hypotenuse. Measure it with your ruler and check the result with what you get isolating in the area formula.

381. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles sabiendo que un cateto es de 8cm. ¿Cuánto mide el otro cateto? Calcula su superficie en  $\text{dm}^2$ . Halla la altura sobre la hipotenusa despejando en la formula del área conocida. ¿Qué cosa curiosa observas? Nota: **esta propiedad siempre se cumple en los triángulos rectángulos isósceles.**

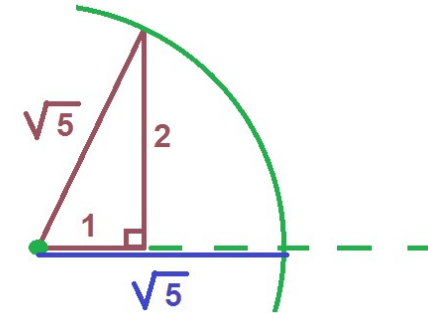
Find out the hypotenuse in a right isosceles triangle taking into account that one cathetus is 8cm. What is the measurement of the other cathetus? Calculate its area in  $\text{dm}^2$ . Find out what the measurement of the height on the hypotenuse is by isolating it from the area formula. ¿What curious thing you observe? Note: **this property applies for every right isosceles triangle.**

382. Imagina que tienes que calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2,7cm y 3,6cm sin emplear Pitágoras en este triángulo. ¿Cómo lo haces?

Imagine that you have to calculate the hypotenuse of a right triangle whose cathetus are 2.7cm and 3.6cm without using Pythagoras Theorem. How can you do that?

#### APLICACIONES APPLICATIONS

Dibujo de raíces cuadradas  
Drawings with square roots



#### RECUERDA LOS CUADRADOS

$1^2=1$	$6^2=36$	$11^2=121$	$16^2=256$
$2^2=4$	$7^2=49$	$12^2=144$	$17^2=289$
$3^2=9$	$8^2=64$	$13^2=169$	$18^2=324$
$4^2=16$	$9^2=81$	$14^2=196$	$19^2=361$
$5^2=25$	$10^2=100$	$15^2=225$	$20^2=400$



383. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{5}\text{cm}$ .



*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{5}$ cm.*

384. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{2}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{2}$ cm.*

385. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{13}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{13}$ cm.*

386. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{41}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{41}$ cm.*

387. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{20}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{20}$ cm.*

388. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{10}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{10}$ cm.*

389. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{8}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{8}$ cm.*

390. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{61}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{61}$ cm.*

391. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{17}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{17}$ cm.*

**Usando otras raíces**

#### RECUERDA

**Si  $(\sqrt{16})^2 = (4)^2 = 16$ , entonces  $(\sqrt{16})^2 = 16$ .**

**Igualmente  $(\sqrt{3})^2 = 3$  y en general  $(\sqrt{n})^2 = n$**

392. Experimenta las matemáticas. Juega a ser un caracol. Dibuja una espiral con triángulos rectángulos de medidas en centímetros  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ ...

*Experience mathematics. Play as a snail. Draw a spiral with right triangles with sides length  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{6}$ ...*

393. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{3}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{3}$ cm.*

394. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{6}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{6}$ cm.*

395. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{7}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{7}$ cm.*

396. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{11}$ cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{11}$ cm.*

397. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{27}$ cm.





*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{27}$  cm.*

398. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{6}$  cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{6}$  cm.*

399. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{12}$  cm.

*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{12}$  cm.*

400. Usando el teorema de Pitágoras, la regla y el compás, dibuja en horizontal un segmento de  $\sqrt{18}$  cm.

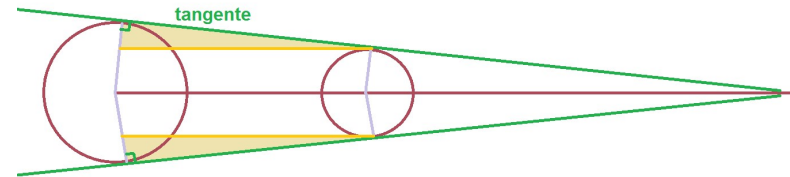
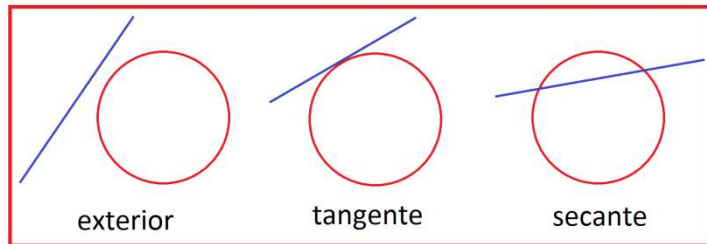
*Using the Pythagoras Theorem, your ruler and compass, draw a horizontal segment of  $\sqrt{18}$  cm.*

#### **Cálculo de tangentes entre circunferencias**

#### **Calculation of tangent lines between circumferences**

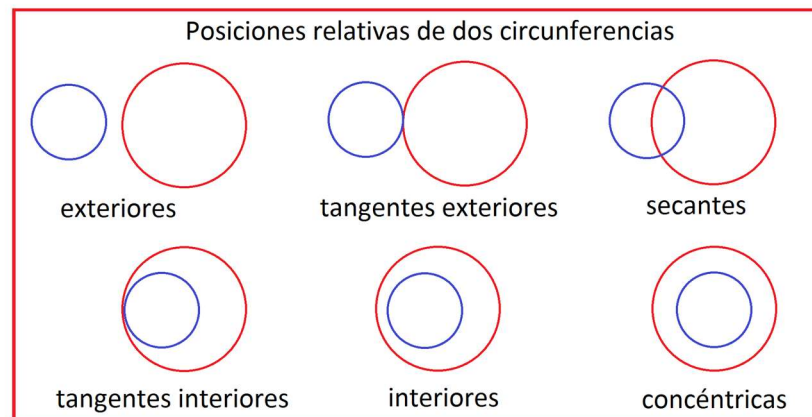
#### **RECUERDA**

**Recta tangente a una curva es una recta que toca a la curva en un SOLO punto.**



#### **RECUERDA**

**El cálculo del segmento tangente común a dos circunferencias se puede hacer porque aparece un triángulo rectángulo gracias a que cualquier radio de la circunferencia SIEMPRE es perpendicular a su tangente.**



Observa que, obviamente, estos ejercicios de cálculo de segmento tangente solo tienen sentido en los tres casos de arriba: exteriores, tangentes exteriores y secantes.

401. Dibuja aproximadamente la siguiente situación: dos circunferencias **exteriores** de radios 2cm y 14cm con sus centros separados una distancia de 20cm. Traza la tangente común a ambas. Señala dónde se forman los ángulos rectos. Calcula el segmento de tangente entre dichas circunferencias aplicando el teorema de Pitágoras. ¿Por qué has podido hacerlo?

*Draw the following situation approximately: two exterior circumferences of radius 2cm and 14cm with their centers separated at a distance of 20cm. Add the common tangent. Point out where the right angles are formed. Calculate the tangent segment between these circumferences by using the Pythagoras Theorem. Why could you do it?*

402. Dibuja aproximadamente la siguiente situación: dos circunferencias **tangentes exteriores** de radios 4cm y 6cm. Traza la tangente común a ambas. Señala dónde se forman los ángulos rectos. Calcula el segmento de tangente entre dichas circunferencias aplicando el teorema de Pitágoras. ¿Por qué has podido hacerlo?

*Draw accurately the following situation: two tangent circumferences of radius 4cm and 6cm. Add the common tangent. Point out where the right angles are formed. Calculate the tangent segment between these circumferences by using the Pythagoras Theorem. Why could you do it?*

403. Dibuja aproximadamente la siguiente situación: dos circunferencias **tangentes exteriores** de radios 3cm y 7cm. Traza la tangente común a ambas. Señala dónde se forman los ángulos rectos. Calcula el segmento de tangente entre dichas circunferencias aplicando el teorema de Pitágoras. ¿Por qué has podido hacerlo?

*Draw accurately the following situation: two tangent circumferences of radius 3cm and 7cm. Add the common tangent. Point out where the right angles are formed. Calculate the tangent segment between these circumferences by using the Pythagoras Theorem. Why could you do it?*

404. Dibuja aproximadamente la siguiente situación: dos circunferencias **secantes** de radios 11cm y 18cm con sus centros separados una distancia de 25cm. Traza la tangente común a ambas. Señala dónde se forman los ángulos rectos. Calcula el segmento de tangente entre dichas circunferencias aplicando el teorema de Pitágoras. ¿Por qué has podido hacerlo?

*Draw the following situation approximately: two secant circumferences or radius 11cm and 18cm with their centers separated at a distance of 25cm. Add the common tangent. Point out where the right angles are formed. Calculate the tangent segment between these circumferences by using the Pythagoras Theorem. Why could you do it?*

405. Dibuja aproximadamente la siguiente situación: dos circunferencias **exteriores** de radios 15cm y 6cm con sus centros separados una distancia de 30cm. Traza la tangente común a ambas. Señala dónde se forman los ángulos rectos. Calcula el segmento de tangente entre dichas circunferencias aplicando el teorema de Pitágoras. ¿Por qué has podido hacerlo?

*Draw the following situation approximately: two exterior circumferences of radius 15cm and 6cm with their centers separated at a distance of 30cm. Add the common tangent. Point out where the right angles are*



formed. Calculate the tangent segment between these circumferences by using the Pythagoras Theorem. Why could you do it?

406. Dibuja aproximadamente la siguiente situación: dos circunferencias **secantes** de radios 20cm y 35cm con sus centros separados una distancia de 30cm. Traza la tangente común a ambas. Señala dónde se forman los ángulos rectos. Calcula el segmento de tangente entre dichas circunferencias aplicando el teorema de Pitágoras. ¿Por qué has podido hacerlo?

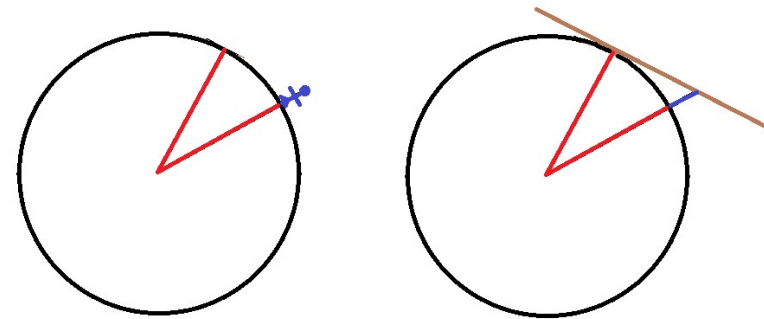
*Draw the following situation approximately: two secant circumferences of radius 20cm and 35cm with their centers separated at a distance of 30cm. Add the common tangent. Point out where the right angles are formed. Calculate the tangent segment between these circumferences by using the Pythagoras Theorem. Why could you do it?*

407. Dibuja aproximadamente la siguiente situación: dos circunferencias **tangentes exteriores** de radios 10cm y 6cm. Traza la tangente común a ambas. Señala dónde se forman los ángulos rectos. Calcula el segmento de tangente entre dichas circunferencias aplicando el teorema de Pitágoras. ¿Por qué has podido hacerlo?

*Draw the following situation accurately: two tangent circumferences of radius 10cm and 6cm. Add the common tangent. Point out where the right angles are formed. Calculate the tangent segment between these circumferences by using the Pythagoras Theorem. Why could you do it?*

**Cálculo de la línea visual al horizonte**

*Calculation of visual lines to the horizon*



$$\text{horizonte} = \sqrt{(R+e)^2 - R^2}$$

R

R+estatura



**RECUERDA => toma el radio medio de la Tierra  $R=6.371\text{km}$  y supón que nuestro planeta idealmente es una esfera.**

408. Calcula la distancia a la línea del horizonte que tiene un observador con los ojos a 1,80m del suelo. ¿Por qué has podido hacer este ejercicio?



409. Calcula la distancia a la línea del horizonte que tiene un observador desde un acantilado si sus ojos están a 250m sobre el nivel del mar. ¿Por qué has podido hacer este ejercicio?
410. Calcula la distancia a la línea del horizonte que tiene un observador subido a un avión cuando está asomado por una ventana de modo que sus ojos estén a 830m sobre el nivel del mar. ¿Por qué has podido hacer este ejercicio?
411. Calcula la distancia a la línea del horizonte que tiene un observador en una torreta eléctrica cuando sus ojos están a 74m del suelo. ¿Por qué has podido hacer este ejercicio?
412. Calcula la distancia a la línea del horizonte que tiene un observador en el paseo marítimo de una ciudad cuando está asomado de modo que sus ojos estén a 3m sobre el nivel del mar. ¿Por qué has podido hacer este ejercicio?
413. Calcula la distancia a la línea del horizonte que tiene un observador en un acantilado cuando está asomado de modo que sus ojos estén a 533m sobre el nivel del mar. ¿Por qué has podido hacer este ejercicio?
414. Calcula la distancia a la línea del horizonte que tiene un vigía con los ojos a 1,73m del suelo si se sube a una atalaya que mide 42m de alto. ¿Por qué has podido hacer este ejercicio?

### Replanteos (casas, jardines, piscinas...)

**RECUERDA: cada ángulo recto debe ser comprobado con la longitud de cuerda adecuada y usando Pitágoras.**



415. Para empezar a hacer los cimientos de una vivienda unifamiliar de planta rectangular de 16m de largo por 12m de ancho, el arquitecto necesita hacer unos cálculos en su despacho para comprobar que las esquinas le queden perfectamente rectas. Explica qué calcula y cómo hace la comprobación. Dibuja la situación. Nota: puedes experimentar este ejercicio en el patio de tu centro.  
*In order to lay the foundation of a house for a single family with a right-angled floor of 16m long per 12m wide, the architect has to do some calculations to check that the corners are perfectly straight. Explain what he calculates and how the checking is done. Draw the situation. NOTE: you can try out this exercise in your school's playground.*
416. Imagina que necesitas dibujar un ángulo recto en un jardín, ¿Qué usarías, cómo lo harías y qué cálculos realizarías para ello? Dibuja la situación. Nota: puedes experimentar este ejercicio en el patio de tu centro.  
*Imagine that you have to draw a right angle in a garden. What would you use, how would you do it and what calculations would you do? Draw the situation. NOTE: you can try out this exercise in your school's playground.*
417. Un paisajista va a replantar un parterre en forma de trapecio rectángulo de bases 10m y 13m, con altura 4m. ¿Cuánto medirán los otros lados? ¿Qué cálculos tendrá que hacer el paisajista



para comprobar que el parterre está correctamente dibujado? Dibuja la situación. Nota: puedes experimentar este ejercicio en el patio de tu centro.

*A landscapist is going to redesign a right trapezium-shaped flower bed with base lengths 10m and 13m, and 4m high. What is the measure of the other sides? What calculations will he have to do to check that the bed flower is correctly drawn? Draw the situation. NOTE: you can try out this exercise in your school's playground.*

418. Para replantar un edificio cuadrado de 20m de lado, un aparejador lleva en su maletín únicamente una calculadora y una cuerda medida de 70m. ¿Cómo lo hará? Dibuja la situación. Nota: puedes experimentar este ejercicio en el patio de tu centro.

*In order to redesign a squared building with 20m side length, a building engineer is taking just a calculator and measure rope of 70m. How can he do that? Draw the situation. NOTE: you can try out this exercise in your school's playground.*

419. ¿Cómo replantarías una piscina rectangular de lados 5m y 10m para asegurarte los ángulos rectos en las esquinas? Dibuja la situación. Nota: puedes experimentar este ejercicio en el patio de tu centro.

*How would you redesign a rectangular pool with sides 5m and 10m to assure the right angles in the corners? Draw the situation. NOTE: you can try out this exercise in your school's playground.*

420. Se contrata a un arquitecto para ubicar una plaza romboidal de diagonales 80m y 60m. Explica cómo lo hace. Dibuja la situación. Nota: puedes experimentar este ejercicio en el patio de tu centro.

*An architect has been contracted to place a rhomboid square with diagonals 80m and 60m. Explain how he can do that. Draw the situation. NOTE: you can try out this exercise in your school's playground.*

421. Se va a replantar un edificio de apartamentos con planta trapezoidal isósceles de altura 40m y bases 140m y 80m. a) Dibuja fielmente la planta. b) Calcula exactamente cuánto medirán las fachadas que faltan (usando Pitágoras). c) Explica y dibuja las fases

que seguirías para replantar el edificio (medida de la cuerda, diagonal necesaria...).

*A block of apartments with an isosceles trapezoidal floor of 40m height and 140m and 80m as bases length is going to be redesigned. a) Draw this floor accurately. b) Calculate the measure of the missing facades (use Pythagoras). c) Explain and draw the stages that you would follow to redesign this building (string measure, necessary diagonal).*

## POLÍGONOS

### POLYGONS

#### RECUERDA DE 1º DE ESO LAS SIMETRÍAS EN POLÍGONOS

@ Los triángulos equiláteros quedan divididos por cada altura (ejes de simetrías) en dos triángulos rectángulos iguales.

@ Los triángulos isósceles quedan divididos por la altura del lado desigual (eje de simetría) en dos triángulos rectángulos iguales.

@ Los TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS ISÓSCELES quedan divididos por la altura (sobre la hipotenusa) en dos triángulos rectángulos isósceles iguales => por lo tanto, la altura sobre la hipotenusa pasa por la mitad de la hipotenusa. ¡Qué chulo!

@ Los cuadrados quedan divididos, trazando una de sus diagonales (eje de simetría), en dos triángulos rectángulos isósceles iguales.

@ Los cuadrados quedan divididos, trazando las dos diagonales (que se cortan en perpendicular por sus puntos medios), en cuatro triángulos rectángulos isósceles iguales.

@ Los rectángulos quedan divididos, trazando una de sus diagonales, en dos triángulos rectángulos iguales.

@ Los rectángulos quedan divididos, trazando las dos diagonales (que se cortan por sus puntos medios), en cuatro triángulos isósceles iguales.

@ Los rombos quedan divididos, trazando una de sus diagonales (eje de simetría) en dos triángulos isósceles iguales.

@ Los rombos quedan divididos, trazando las dos diagonales (que se cortan en perpendicular por sus puntos medios) en cuatro triángulos rectángulos iguales.

#### REMEMBER FROM 1<sup>st</sup> CSE THE SYMMETRIES IN POLYGONS





*@Equilateral triangles are divided by each height (symmetry axis) into two equal right triangles.*

*@Isosceles triangles are divided by the height of the unequal side (symmetry axis) into two equal right triangles.*

*@Right isosceles triangles are divided by the height of the hypotenuse into two equal right isosceles triangles => so the height of the hypotenuse goes just through the middle of the hypotenuse. Amazing!*

*@Squares are divided, drawing one of their diagonals (symmetry axis), into two equal isosceles right triangles.*

*@Squares are divided, drawing both of their diagonals (that are cut by their middle points in perpendicular), into four equal isosceles right triangles.*

*@Rectangles are divided, drawing one of their diagonals, into two equal right triangles.*

*@Rectangles are divided, drawing both of their diagonals (that are cut by their middle points), into four equal isosceles triangles.*

*@Rhombuses are divided, drawing one of their diagonals (symmetry axis) into two equal isosceles triangles.*

*@Rhombuses are divided, drawing both of their diagonals (that are cut by their middle points in perpendicular), into four equal right triangles.*



422. Dibuja aproximadamente la siguiente situación: un barco tiene 12m de eslora; su mástil está colocado en el centro del barco; desde la proa y la popa hay atados a la punta del mástil dos cabos iguales de 10m. Halla la altura del mástil. ¿Qué propiedad de los triángulos has empleado para resolver este problema?

*Draw the next situation approximately: a boat with 12m length; its mast is located in the middle of the boat; from the prow to the poop there are two equal ropes of 10m tied to the end of the mast. Get the mast's height. Which triangle property did you use to solve this problem?*

423. Una mesa hexagonal regular se apila perfectamente (inscribe) en una mesa circular de 50cm de radio. Dibújalas y halla la superficie de ambas mesas.

*An hexagonal regular table is inscribed in a circular table with radius 50cm. Draw them and get the area of both tables.*

424. Calcula el lado de una piscina cuadrada sabiendo que se podría inscribir en una circunferencia de radio 12m.

*Calculate the side of a square that is inscribed in a circumference of radius 12m.*

425. Si un hexágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 7cm, ¿Cuál es el área que queda entre el círculo y el hexágono? *If a regular hexagon is inscribed in a circumference of radius 7cm, which will be the area left between the circle and the hexagon?*

426. Halla la superficie de un tatami (cuadrado) inscrito en una circunferencia de radio 100cm. *Get the area of a tatami (square) inscribed in a circumference of radius 100 cm.*

427. La diagonal de un rectángulo de lados 5cm y 12cm es igual al radio de una circunferencia. ¿Cuánto mide el área y la longitud de esta circunferencia?

*The diagonal in a rectangle of side lengths 5cm and 12 cm is equal to the radius of a circumference. What is the measure of the circumference's area and length?*

428. Halla el perímetro y el área de una fuente cuadrada sabiendo que está inscrita en un jardín circular de 8m de radio.

*Get the perimeter of a squared fountain taking into account that this fountain is inscribed in a circular garden of radius 8m.*



429. ¿Cuál será el radio de un tatami de lado 270cm? Nota: por “radio” se ha de entender el radio de la circunferencia circunscrita al cuadrado.

430. Un bombero dispone de una escalera de 26m para subir a la torre de una iglesia de 24m de altura. ¿A qué distancia de la pared deberá poner la escalera para llegar justo a la cornisa? Explica qué haces.

*A fireman has a ladder of 26m to climb up the tower of a church with 24m height. At what distance from the wall should he place the ladder in order to get right to the cornice? Explain what you do.*

431. Con un láser he medido la distancia entre mi porche y el porche de mi vecino trasero => 70m; después, he medido la distancia entre mi porche y el porche de mi vecino contiguo => 45m; sabiendo que estas líneas láser recién medidas forman un ángulo recto, a) ¿a qué distancia **exacta** están, uno del otro, los porches de mis vecinos? b) Dibuja la situación fielmente; c) si trazamos imaginariamente una circunferencia desde mi porche que tenga por radio la distancia al porche de mi vecino trasero, ¿cuánta superficie tendría el círculo interior? d) ¿cuál sería el área intermedia entre circunferencia y triángulo?

*I have used a laser to measure the distance between my porch and my back neighbour's porch => 70m; after that, I have measured the distance between my porch and my adjacent neighbour's porch => 45m; taking into account that these laser lines make a right angle, a) what is the **exact** distance between my neighbours' porches? b) Draw this situation accurately; c) if we draw an imaginary circumference from my porch having as radius the distance to my back neighbour's porch, how much will the circle's area measure? d) which would be the intermediate area between circumference and triangle?*

432. La fachada de mi casa tiene 12m. Mirándola desde arriba, si me voy a la esquina derecha veo el reloj de la plaza del pueblo con un ángulo de 53°; además, desde la otra esquina de mi fachada también veo el reloj con un ángulo de 53°. a) Dibuja la situación grosso modo. b) ¿Qué tipo de figura poligonal ha resultado? c) Si la puerta de mi

casa está en mitad de mi fachada y resulta que el reloj está a 8m de allí, ¿a qué distancia **exacta** está el reloj de la plaza de cada una de las esquinas de mi fachada? d) ¿Qué propiedad has usado para resolver la pregunta anterior? e) ¿Con qué ángulo ve las esquinas de mi casa una persona que se sitúe en el reloj?

*The facade of my house has 12m. Looking at it from above, if I go to the right corner, I can see the clock of the town's main square with an angle of 53°; in addition to this, from the other corner of my facade I can also see the clock with an angle of 53°. A) Draw this situation. B) What type of polygonal shape did you get? C) If the door to my house is in the middle of my facade and the clock is 8m away from the door, what is the **exact** distance between the clock and each of my facade's corners? D) Which property did you use to solve the previous question? E) If a person is in the clock and his arms are spread pointing at each corner, which angle will he see between both arms?*

433. **Resuelto en youtube.** El príncipe Felipe está en la puerta de la iglesia. Su amada princesa Leticia está en lo alto de la torre del castillo. Desde la puerta de la iglesia Felipe ve a Leticia en la torre del castillo con un ángulo de 50° (tomado en relación a la horizontal). En cambio, desde la torre del castillo, Leticia ve a Felipe en la puerta de la iglesia con un ángulo de 40° (tomado en relación a la vertical). Si desde la puerta de la iglesia a la puerta del castillo hay 25m y sabemos que la altura de la torre es de 31,9m, a) ¿qué distancia **exactamente** hay entre Felipe y Leticia en línea recta (la línea visual)? b) Dibuja la situación. c) ¿Cuánto mediría la línea visual si Felipe se acercara 10m al castillo? Nota: el príncipe Felipe mide 1,90m.

*Prince Philip is at the church's door. His beloved Princess Leticia is on top of the castle's tower. From the door of the church Prince Philip can see the tower of the castle with an angle of 60° (taken in relation to the horizontal). However, from the tower of the castle Princess Leticia can see Prince Philip at the door to the church with an angle of 30° (taken in relation to the vertical). If there are 22.5m from the church's door to the castle's door and we know that the tower's height is 31,9m, a) what is the*



*exact distance between Princess Leticia and Prince Philip in straight line (visual line)? b) draw the situation. c) What is the measure of the visual line if Prince Philip approaches the castle in 10m? Note: prince Felipe is 1.90m tall.*

434. Una cometa se amarra al suelo por dos cuerdas que forman un ángulo recto. Si cada cuerda mide 10m, ¿a qué altura está la cometa? ¿A qué distancia de la vertical se encuentran sujetas cada una de las cuerdas? Nota: debes primero calcular la distancia entre las cuerdas amarradas al suelo.

*A kite is tied by two strings to the floor forming a right angle. If both strings are 10m long, what height is the kite from the floor? At what distance from the vertical is each of the tied strings? NOTE: first you must calculate the distance between tied strings.*

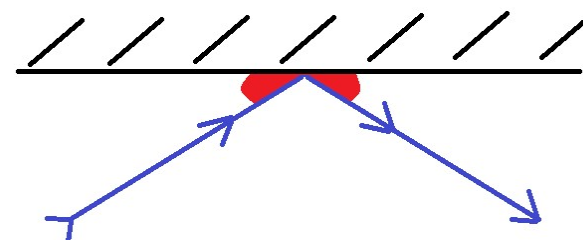
435. Un edificio de alto secreto tiene forma de heptágono regular de lado 48m. Sabiendo que está inscrito en una circunferencia-jardín de radio 55m, calcula el área que queda para jardín (región de círculo entre circunferencia y heptágono).

*A highly-secret building has a regular heptagon shape of 48m side. Knowing that this heptagon is inscribed in a garden-circumference of radius 55m, calculate the area that is left for the garden (region of circle between circumference and heptagon).*

#### PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA (TALES)

##### RECUERDA

**Segunda ley de la reflexión de la luz => cuando la luz incide sobre una superficie, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.**



**Nota: los dibujos han de estar detallados con los ángulos necesarios.**

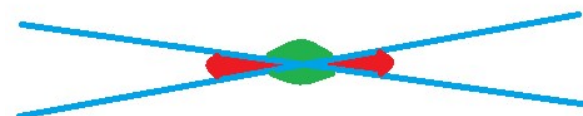
436. Dibuja una vista aérea de la siguiente situación: un coche con dos ocupantes en la parte delantera. Pinta ahora un ocupante en la parte trasera de manera que el conductor del vehículo lo vea desde el retrovisor central.

437. Dibuja una vista aérea de la siguiente situación: estás en la acera mirando un escaparate y te das cuenta que en el cristal se ve reflejado un perro que pasea por la acera de enfrente de la tienda.

438. Dibuja una vista aérea de la siguiente situación: una clase con ventanas en un lateral. En uno de los pupitres junto a una de esas ventanas, hay un niño con un reloj intentando iluminar la cara de otro niño sentado en otro lugar del aula. Pinta dónde está el sol y las posiciones de los niños y el reloj. Pinta además la trayectoria del rayo de luz.

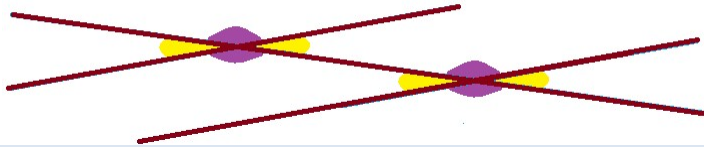
439. Dibuja una vista aérea de la siguiente situación: una clase con la pizarra al frente y todo un lateral de ventanas abiertas. Un niño de la primera fila de pupitres se queja de que no ve una parte de la pizarra por culpa del reflejo. Pinta dónde está el sol y dónde está el niño. ¿Habrá en tu clase imaginaria algún otro niño que tenga el mismo problema?

##### RECUERDA LOS ÁNGULOS DE TALES





Ángulos opuestos por rectas secantes son iguales.



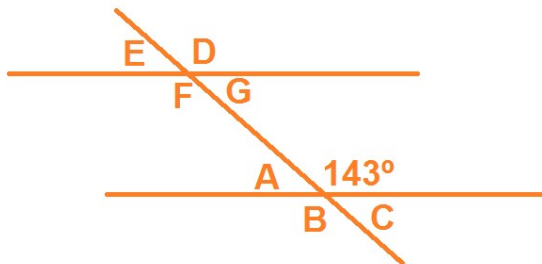
Una recta secante a dos rectas paralelas deja ángulos homólogos iguales.

RECUERDA LA SUMA DE ÁNGULOS INTERIORES

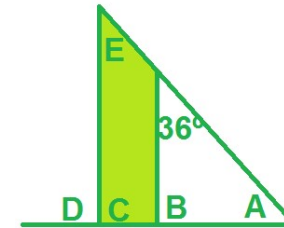
Triángulo	=> $180^\circ = 1 \cdot 180^\circ$ => se forma un triángulo.
Cuadrilátero	=> $360^\circ = 2 \cdot 180^\circ$ => se forman dos triángulos.
Pentágono	=> $540^\circ = 3 \cdot 180^\circ$ => se forman tres triángulos.
...	



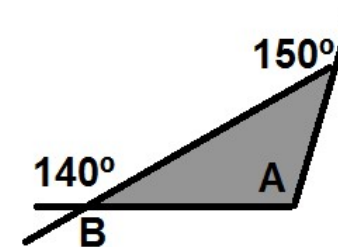
440. Calcula la medida de los ángulos que se indican en la figura:



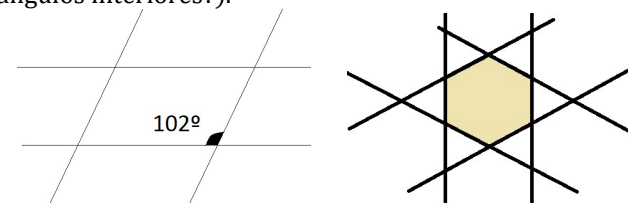
441. Calcula la medida de los ángulos que se indican en la figura:



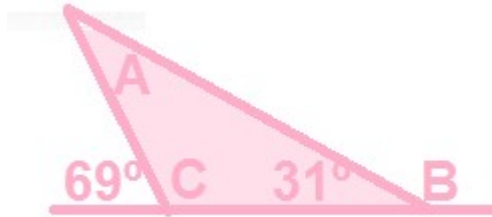
442. Calcula la medida de los ángulos que se indican en la figura:



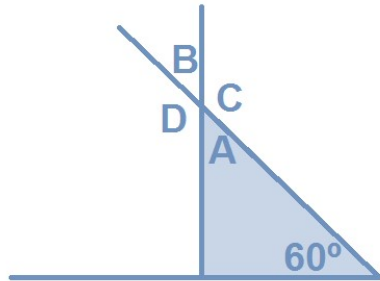
443. Halla los ángulos que faltan en las figuras (nota: la región sombreada de la derecha es un hexágono regular => ¿cuánto miden sus ángulos interiores?).



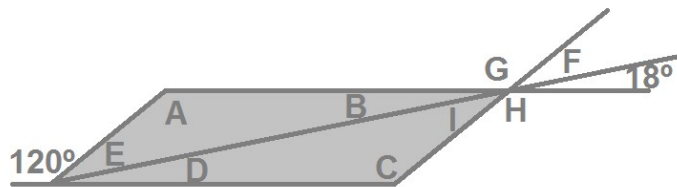
444. Calcula la medida de los ángulos que se indican en la figura:



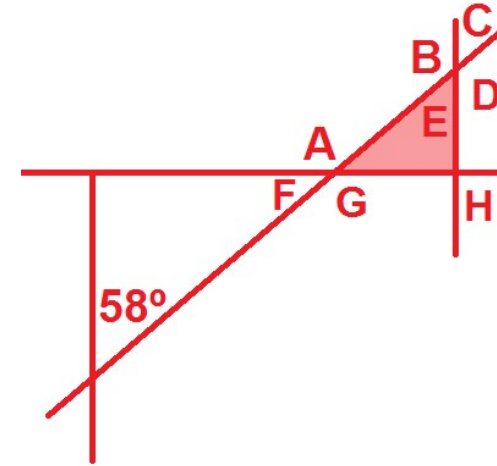
445. Calcula la medida de los ángulos que se indican en la figura:



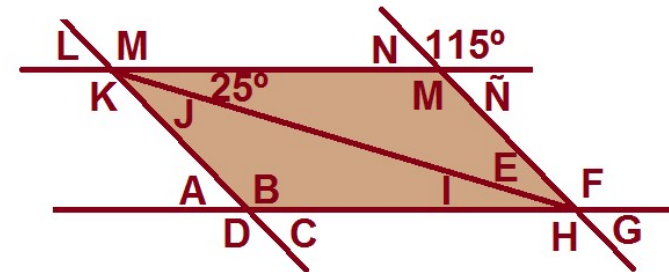
446. Calcula la medida de los ángulos que se indican en la figura:



447. Calcula la medida de los ángulos que se indican en la figura:

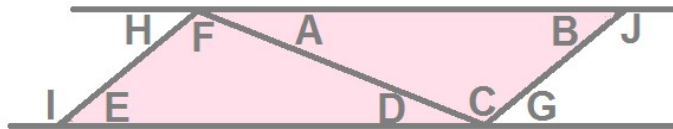


448. Calcula la medida de los ángulos que se indican en la figura:

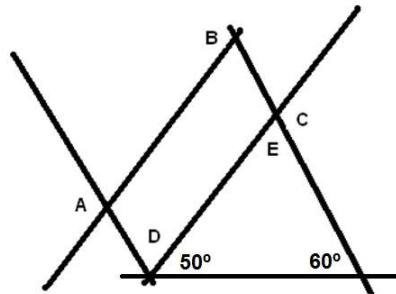


449. ¿Verdadero o falso? a)  $C=180^\circ-(A+B)$ ; b)  $F+E+D=180^\circ$ ; c)  $180^\circ-E=I$ ; d)  $180^\circ-G=I$ ; e)  $I=F+A$ ; f)  $D=B$

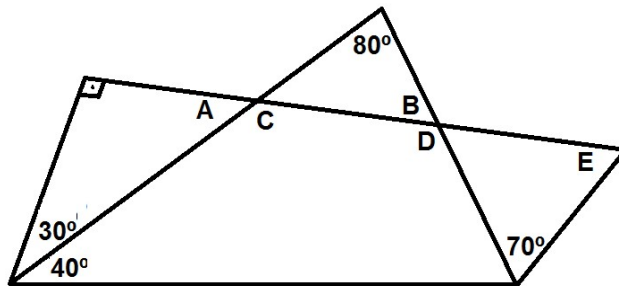




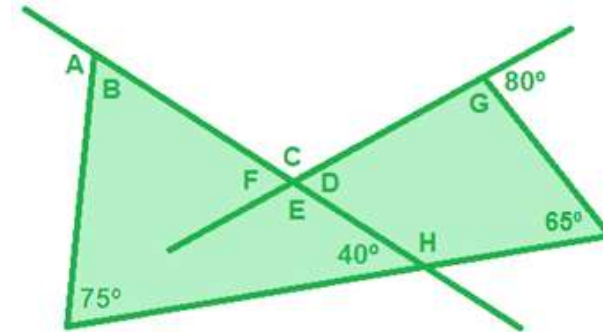
450. Calcula los ángulos desconocidos:



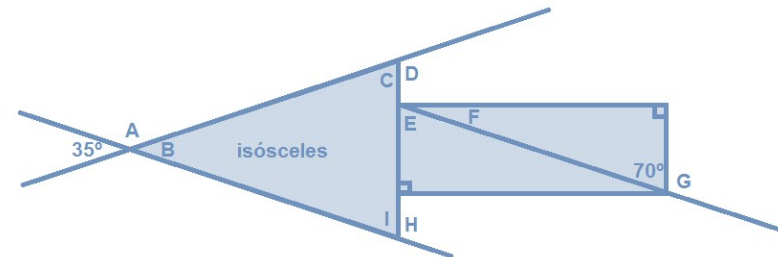
451. **Resuelto en youtube.** Calcula los ángulos desconocidos sin olvidarte de cuánto suman los ángulos interiores de los triángulos y los cuadriláteros:



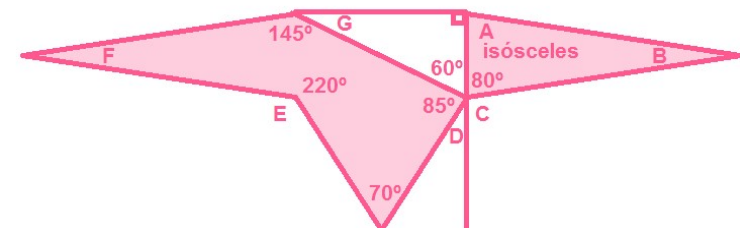
452. Calcula los ángulos desconocidos sin olvidarte de cuánto suman los ángulos interiores de los triángulos y los cuadriláteros:



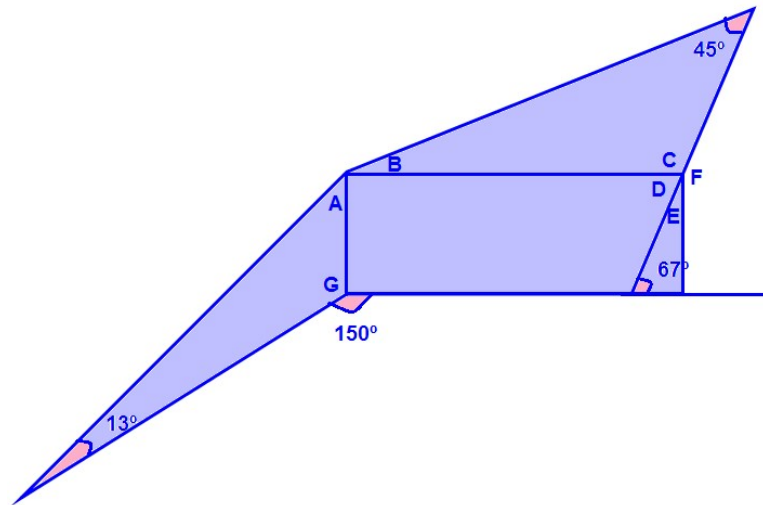
453. Calcula los ángulos desconocidos:



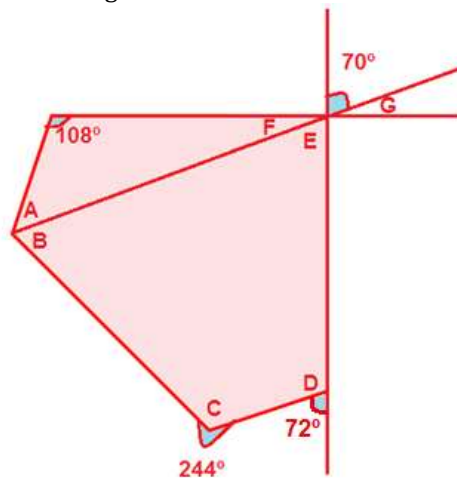
454. Calcula los ángulos desconocidos sin olvidarte de cuánto suman los ángulos interiores de los polígonos:



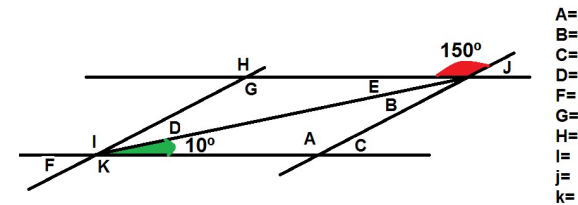
455. Calcula los ángulos desconocidos:



456. Calcula los ángulos desconocidos:

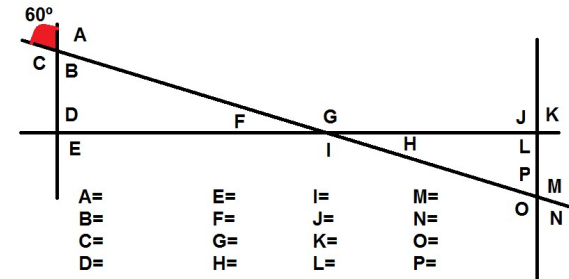


457. Calcula los ángulos desconocidos:



458.

Calcula los ángulos desconocidos:

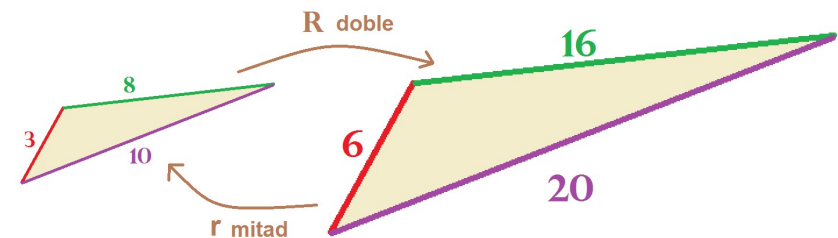


RECUERDA PROPORCIONALIDAD DE TALES

Dos figuras son semejantes cuando tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

R razón de proporcionalidad de figura grande respecto a figura pequeña.

r razón de proporcionalidad de figura pequeña respecto a figura grande.

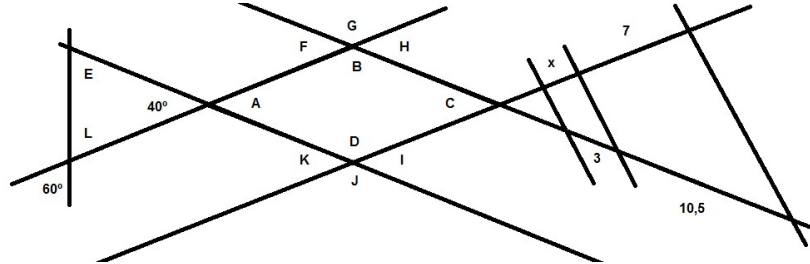


$$R = \frac{6}{3} = \frac{16}{8} = \frac{20}{10} = 2$$

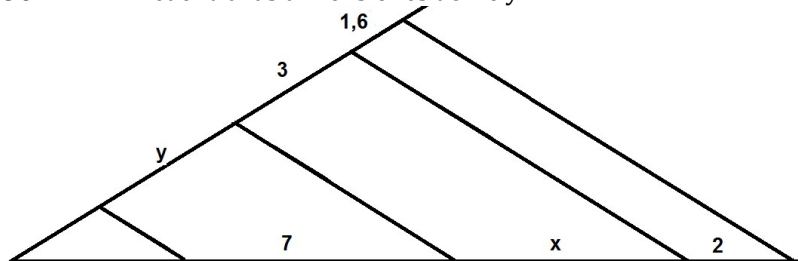
$$r = \frac{3}{6} = \frac{8}{16} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$



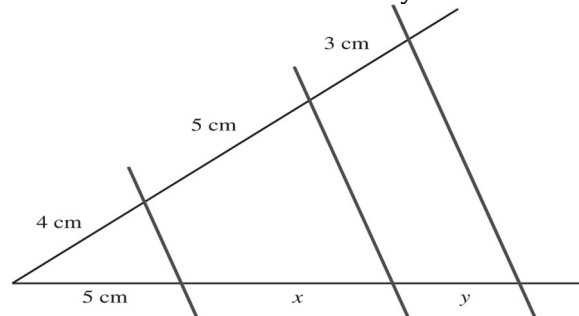
459. Halla los ángulos señalados con letras de la A a la L y la medida de la x:



460. Encuentra las dimensiones de x e y.



461. Encuentra las dimensiones de x e y.



Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Qué tienen en común las tarjetas

de crédito, el Partenón y Míster Universo? ¿En qué se parece un artesano, un escultor, un arquitecto y la Fábrica de Moneda y Timbre?



462. Un triángulo tiene por lados 2cm, 3cm y 4,5cm. Otro triángulo tiene por lados 6cm, 9cm, 13,5cm. ¿Son semejantes estas figuras? En caso afirmativo, halla las dos razones de proporcionalidad, R (figura grande con respecto a figura pequeña) y r (figura pequeña con respecto a figura grande). Dibuja las dos figuras. Halla el perímetro de la segunda usando el perímetro de la primera y la razón de semejanza adecuada.

*A triangle has sides of 2cm, 3cm and 4.5cm. Another triangle has sides of 6cm, 9cm and 13.5cm. Are these figures similar? In case they are, find out the reasons of proportionality, R (the big figure in relation to the small figure) and r (the small figure in relation to the big figure). Draw both figures. Find out the perimeter of the second figure by using the perimeter of the first figure and the appropriate reason of similarity.*

463. Un cuadrilátero tiene por lados 3cm, 4cm, 6cm y 8cm. Otro cuadrilátero semejante a él tiene por lados 6cm, 8cm, 12cm y 16cm. ¿Qué dos razones de proporcionalidad encuentras? Dibuja un ejemplo con estos datos. Halla el perímetro del segundo usando el perímetro del primero y la razón de semejanza adecuada.

*A quadrilateral has sides of 3cm, 4cm, 6cm and 8cm. Another similar quadrilateral has sides of 6cm, 8cm, 12cm and 16cm. What reasons of proportionality do you find? Draw an example taking these data into account. Find out the perimeter of the second quadrilateral by using the*



*perimeter of the first quadrilateral and the appropriate reason of similarity.*

464. Dibuja con regla y compás un triángulo isósceles cuatro veces más grande que uno de lados iguales 3cm y de base 2cm (lado desigual). ¿Cuál es la razón de semejanza  $r$  (figura pequeña con respecto a figura grande)? Halla el perímetro del primero usando el perímetro del segundo y la razón de semejanza adecuada.

*Use your ruler and compass to draw an isosceles triangle four times bigger than one of the equal sides of 3cm and base of 2cm (unequal side). What is the reason of similarity  $r$  (small figure in relation to the big figure)? Find out the perimeter of the first one by using the perimeter of the second one and the appropriate reason of similarity.*

465. Los lados de un triángulo miden 3cm, 4cm y 6cm. En un triángulo semejante a él, el lado homólogo al de 3cm mide 4,5cm. Halla las razones de semejanza  $R$  (figura grande con respecto a figura pequeña) y  $r$  (figura pequeña con respecto a figura grande). Calcula el perímetro de ese triángulo. Halla el perímetro del segundo usando el perímetro del primero y la razón de semejanza adecuada. Dibuja los dos triángulos.

*The sides of a triangle measure 3cm, 4cm and 6cm. In a similar triangle, the equivalent side to the side of 3cm measures 4.5 cm. Find out the reasons of similarity  $R$  (big figure in relation to the small figure) and  $r$  (small figure in relation to the big figure). Calculate the perimeter of this triangle. Find out the perimeter of the second triangle by using the perimeter of the first one and the appropriate reason of similarity. Draw both triangles.*

466. Los lados de un triángulo miden 4,5cm, 5cm y 6cm. En un triángulo semejante a él, el lado homólogo al de 5cm mide 7cm. Halla las razones de semejanza  $R$  (figura grande con respecto a figura pequeña) y  $r$  (figura pequeña con respecto a figura grande). Calcula el perímetro de ese triángulo. Halla el perímetro del segundo usando el perímetro del primero y la razón de semejanza adecuada. Dibuja los dos triángulos.

*The sides of a triangle measure 4.5 cm, 5cm and 6cm. In a similar triangle, the equivalent side to the side of 5cm measures 7cm. Find out the reasons of similarity  $R$  (big figure in relation to the small figure) and  $r$  (small figure in relation to the big figure). Calculate the perimeter of this triangle. Find out the perimeter of the second triangle by using the perimeter of the first one and the appropriate reason of similarity. Draw both triangles.*

467. Un trapecio rectángulo tiene por altura 3cm y por bases 4cm y 6cm. Dibuja este y uno más grande semejante a él con  $R = 1,5$ . ¿Cuál es la razón de semejanza  $r$  (figura pequeña respecto a figura grande)? ¿Cuánto miden los lados del trapecio nuevo? Halla el perímetro del segundo usando el perímetro del primero y la razón de semejanza adecuada.

*A right trapezium is 3cm height and it has 4cm and 6cm as bases. Draw this trapezium and another bigger similar trapezium with  $R=1.5$ . What is the reason of similarity  $r$  (small figure in relation to the big figure)? What's the measure of the sides in the new trapezium? Find out the perimeter of the second trapezium by using the perimeter of the first one and the appropriate reason of similarity.*

468. Dibuja un rombo grande semejante a otro de diagonales 5cm y 4cm con  $R = 2,5$ . ¿Cuál es la razón de semejanza  $r$  (figura pequeña respecto a figura grande)? ¿Cuánto miden las diagonales del nuevo? Mide los lados y ángulos de los dos rombos. Halla el perímetro del primero usando el perímetro del segundo y la razón de semejanza adecuada.

*Draw a big rhombus similar to another rhombus whose diagonals are 5cm and 4cm with  $R=2.5$ . What is the reason of similarity  $r$  (small figure in relation to the big figure)? What is the measure of the diagonals in the new rhombus? Measure the sides and angles in both rhombuses. Find out the perimeter of the first rhombus by using the perimeter of the second one and the appropriate reason of similarity.*

469. Dibuja un rombo pequeño semejante a otro de lados 6cm con un ángulo de  $60^\circ$  y  $r = 0,5$ . ¿Cuál es la razón de semejanza  $R$  (figura grande respecto a figura pequeña)? ¿Cuánto miden los lados y



ángulos del nuevo rombo? Mide las diagonales de los dos rombos => ¿cumplen también ellas la proporción? Halla el perímetro del segundo usando el perímetro del primero.

*Draw a small rhombus similar to another rhombus whose sides are 6cm with an angle of  $60^\circ$  and  $r=0.5$ . What is the reason of similarity  $R$  (big figure in relation to the small figure)? What is the measure of the sides and angles in the new rhombus? Measure the diagonals of both rhombuses => does the proportion occur in them? Find out the perimeter of the second rhombus by using the perimeter of the first one.*

470. En un hexágono regular, sé que el perímetro mide 24cm. Si tengo otro más pequeño semejante a él con una razón de  $r=0.75$ , ¿cuál es la razón de semejanza  $R$  (figura grande respecto a figura pequeña)? ¿Cuál será el perímetro del nuevo hexágono? ¿Cuánto miden los lados de las dos figuras?

*The perimeter of a regular hexagon measures 24 cm. If I have another smaller hexagon similar to the first one with a reason of similarity of  $r=0.75$ , what is the reason of similarity  $R$  (big figure in relation to the small figure)? What will be the perimeter of the new hexagon? What is the measure of sides in the two figures?*

471. En un pentágono (que no es regular), sé que el perímetro mide 12m. Si tengo otro más grande pero semejante a él con una razón de  $R=3$ , ¿cuál es la razón de semejanza  $r$  (figura pequeña respecto a figura grande)? ¿Cuál será el perímetro del nuevo pentágono?

*The perimeter of a pentagon (non-regular) measures 12m. If I have another bigger pentagon similar to the first one with a reason of similarity of  $R=3$ , what is the reason of similarity  $r$  (small figure in relation to the big figure)? What is the perimeter of the new pentagon?*

472. En un heptágono (que no es regular), sé que el perímetro mide 25cm. Si tengo otro más grande semejante a él con una razón de  $R=1.75$  => ¿cuál será el perímetro del nuevo heptágono? ¿Cuál es la razón de semejanza  $r$  (figura pequeña respecto a figura grande)?

*The perimeter of an heptagon (non-regular) measures 25cm. If I have another bigger heptagon similar to the first one with a reason of*

*similarity  $R=1.75$ , what is the reason of similarity  $r$  (small figure in relation to the big figure)?*

473. En un octógono regular, sé que el perímetro mide 16cm. Si tengo otro más grande pero semejante a él con una razón de  $R=2.25$  => ¿cuál será el perímetro del nuevo octógono? ¿Cuánto miden los lados de las dos figuras? ¿Cuál es la razón de semejanza  $r$  (figura pequeña respecto a figura grande)?

*The perimeter of a regular octagon measures 16cm. If I have another bigger octagon similar to the first one with a reason of similarity  $R=2.25$  => what is the perimeter of the new octagon? What is the measure of sides in the two figures? What is the reason of similarity  $r$  (small figure in relation to the big figure)?*

474. Dibuja dos romboides: el primero de lados 7cm y 3cm; el segundo más grande semejante al primero con  $R = 1.5$ . ¿Qué ángulos interiores tiene tu romboide y cuánto suman todos juntos? Mide todos los lados de la segunda figura. ¿Cuál es la razón de semejanza  $r$  (figura pequeña respecto a figura grande)? Halla el perímetro del segundo romboide usando el perímetro del primero y la razón de semejanza adecuada.

*Draw two rhomboids: the first one with sides of 7cm and 3cm; the second one must be bigger and similar to the first rhomboid with  $R= 1.5$ . What interior angles does your rhomboid have? How much do they add together? Measure all the sides in the second figure. What is the reason of similarity  $r$  (small figure in relation to the big figure)? Find out the perimeter of the second rhomboid by using the perimeter of the first one and the appropriate reason of similarity.*

475. En un hexágono regular, sé que el perímetro mide 36cm. Si tengo otro más pequeño pero semejante a él con una razón de  $r=0.4$ , ¿cuál es la razón de semejanza  $R$  (figura grande respecto a figura pequeña)? ¿Cuál será el perímetro del nuevo hexágono (hallado a partir del perímetro de la figura original)? ¿Cuánto miden los lados de las dos figuras? Dibújalas.

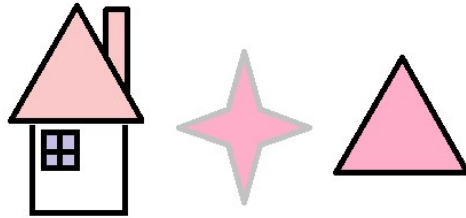
*The perimeter of a regular hexagon measures 36cm. If I have a smaller hexagon similar to the first one with a reason  $r=0.4$ , what is the reason of*





similarity  $R$  (big figure in relation to the small figure)? What is the perimeter of the new hexagon (taking into account the perimeter of the original figure)? What is the measure of sides in both figures? Draw them.

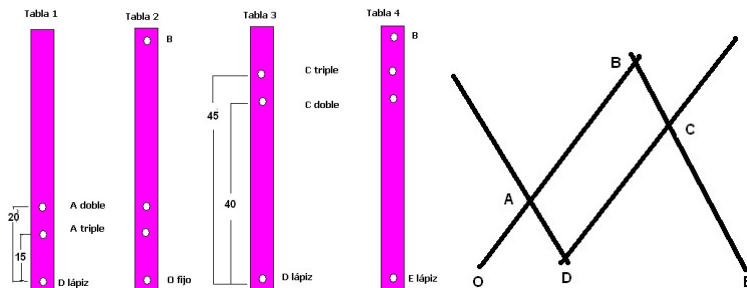
476. Dibuja figuras semejantes a estas con razones 2; 3 y 1,5 respectivamente.



Draw three figures similar to these ones with the following reasons 2; 3 and 1.5 respectively.

477. Construye el pantógrafo siguiente con cuatro tablillas y chinchetas. Investiga por qué funciona este artificio diseñado para ampliar o reducir figuras. Pinta tu nombre, una flor y una casita; redúcelos y amplíalos usando el pantógrafo. ¿Qué razones has empleado?

4 tablillas de 65cmx5cm hechas de cartón

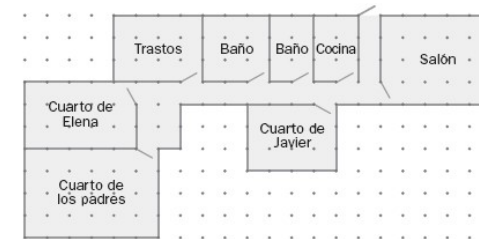


Build the following pantograph with four boards and tacks. Study why this device designed to enlarge or reduce figures can work. Paint your name, a flower and a little house; reduce them and enlarge them afterwards by using the pantograph. What reasons did you use?

## PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD PROBLEMS OF PROPORTIONALITY



478. Mide los metros de fachada que tiene la casa sabiendo que está hecha en una escala de 1:200.



Measure how many meters the front of this house has taking into account that it was done with a scale of 1:200.

Vocabulary NOTE: trastos= Junk, baño=bathroom, baño=toilet, cocina= kitchen, salon= living-room, cuarto de Elena= Elena's room, Javier's room, parents' room.

479. Tumbada en un parque veo la punta de una señal de tráfico alineada con la punta de la copa de un árbol. Mi cabeza está a 2m de la base de la señal y a 5m del tronco del árbol. Dibuja la situación. ¿Qué distancia hay entre la punta de la señal y la punta de la copa del árbol si sé que entre mi cabeza y la punta de la señal hay 3m? ¿Cuántos triángulos se han formado? ¿Son semejantes? ¿Puedes calcular con los datos que tienes lo que mide de alto el árbol?



*As I am lying down in the park, I can see the end of a traffic sign lined up with the end of a tree top. My head is 2m away from the base of the sign and 5m from the trunk of the tree. Draw the situation. What is the distance between the end of the sign and the end of the tree top if there are 3m between my head and the end of the sign? How many triangles have been created? Are they similar? Can you calculate the height of the tree with the data provided?*

**480.** Antonio y Andrés quieren medir la altura de una canasta. Para ello Antonio coge un espejo y lo pone en el suelo; por su parte, Andrés se separa poco a poco de la canasta mirando al espejo hasta conseguir ver la punta de la canasta en el espejo. Antonio mide ahora la distancia entre los pies de Andrés y el espejo (3m) y la distancia entre el espejo y la base de la canasta (7m). Después, Antonio mide la estatura de Andrés (1,5m). Dibuja la situación. ¿Cuántos triángulos se han formado? Usando proporcionalidad de triángulos, Antonio y Andrés descubren la altura de la canasta. ¿Cómo lo han hecho? Calcúlala. Nota: para hacer este ejercicio tienes que saber que el espejo refleja la luz con el mismo ángulo de incidencia.

*Tony and Andrew want to measure the height of a basketball hoop. In order to do that, Tony takes a mirror and lays it on the floor; at the same time, Andrew gets separated from the hoop little by little until he can see the end of the hoop in the mirror. Tony measures the distance between Andrew's feet and the mirror (3m) and the distance between the mirror and the base of the hoop (7m). After that, Tony measures Andrew's height (1.5m). Draw the situation. How many triangles have been created? Tony and Andrew were able to discover the height of the hoop by using proportionality of triangles. How did they do that? Calculate it. NOTE: to do this exercise you need to take into account that the mirror reflects the light with the same angle of reflection.*

**Sol y sombra**  
**Sun and shadow**

#### RECUERDA

**El sol está tan lejos que sus rayos nos llegan siempre en la misma dirección (paralelos).**

**La altura solar es el ángulo que forma con la horizontal la línea imaginaria que une el objeto con el final de la sombra.**

#### REMEMBER

*The sun is so far away that its rays always get to us in the same direction (parallel).*

*The solar height is the angle formed with the horizontal line the imaginary line that links the object with the end of the shadow.*

**481.** ¿Cuánto mide un eucalipto que proyecta una sombra de 20m si he clavado en perpendicular al suelo un palito que asoma 3cm y observo que proyecta una sombra de 4cm? ¿Qué ángulo hace el sol con la horizontal a esta hora?

*What is the measure of an eucalyptus tree that projects a shadow of 20m if I have fixed a stick perpendicularly to the floor that is seen 3cm and I observe that the stick projects a shadow of 4cm? What angle does the sun form with the horizon at this time of the day?*

**482.** La punta de la veleta colocada sobre el tejado de un edificio proyecta una sombra de 60m. Tengo una veleta exactamente igual colocada en el suelo y observo que proyecta una sombra de 45cm. ¿Cuánto mide el edificio? ¿Qué ángulo hace el sol con la horizontal en el momento de esta experiencia? Nota: la veleta mide 60cm.

*The end of a weather-vane that is placed on the roof of a building projects a shadow of 60m. I have got a weather-vane that has been placed in exactly the same way and I observe that projects a shadow of 45cm. What is the measure of the building? What angle does the sun form with the horizon at the moment of this experience? NOTE: the weather-vane measures 60cm.*

**INTRODUCCIÓN.** Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿A qué se refieren los periodistas cuando dicen que un problema es como la cuadratura del círculo?



### DIVIDIR SEGMENTO CON TALES

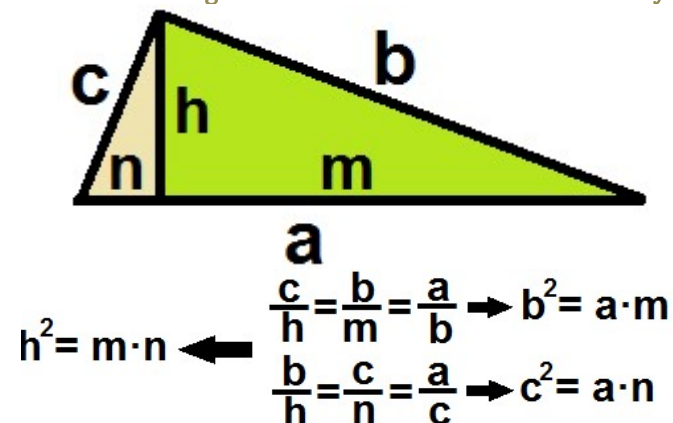
La importancia de este ejercicio radica en que, gracias a él, sabemos cómo dibujar CON REGLA Y COMPÁS CUALQUIER distancia dada como **FRACCIÓN** (número racional positivo).

Explica siempre la teoría que usas para hacer el ejercicio.

483. Divide un segmento de 8cm en 3 partes iguales empleando el método de Tales.
484. Divide un segmento de 15cm en 7 partes iguales empleando el método de Tales.
485. Divide un segmento de 14cm en 6 partes iguales empleando el método de Tales.
486. Divide un segmento de 11cm en 5 partes iguales empleando el método de Tales.
487. Divide un segmento de 13cm en 9 partes iguales empleando el método de Tales.

### TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS TEOREMAS DE LA ALTURA Y LOS CATETOS

(mira la demostración gráfica de estos teoremas en el vídeo de youtube)



Reflexionando un poco deducimos que se cumple...

$$a = m + n \quad h = \frac{b \cdot c}{a}$$



**INTERESANTE.** Consecuencia de  $h^2 = m \cdot n$  es la **DEMOSTRACIÓN** de la propiedad ya estudiada sobre los triángulos rectángulos isósceles: la altura sobre la hipotenusa resulta ser la mitad de esta hipotenusa, porque al ser isósceles la hipotenusa sería  $a = m + m \Rightarrow h^2 = m \cdot m \Rightarrow h^2 = m^2 \Rightarrow h = m$ . ¡Qué chulo!



488. Dibuja con regla y compás dos triángulos rectángulos de lados 15cm, 20cm y 25cm. Traza, en uno de ellos, la altura que falta (la que no coincide con ningún cateto) y recorta los dos triángulos rectángulos que se forman, apuntando la medida de todos los lados. Coloca en posición de Tales los tres triángulos y deduce las relaciones que se muestran en la figura anterior obtenidas de la proporcionalidad de triángulos (teoremas de la altura y los catetos).
489. En un triángulo rectángulo con hipotenusa de 12cm y el cateto menor de 6cm, ¿cuánto mide la altura (sobre la hipotenusa)? Dibújalo. Nota: no necesitas calcular el otro cateto.
490. En un triángulo rectángulo con hipotenusa de 3,6cm y un cateto de 1,8cm, ¿cuánto mide la altura (sobre la hipotenusa)? Dibújalo. Nota: no necesitas calcular el otro cateto.
491. Resuelve el triángulo rectángulo de hipotenusa 9cm y proyección de un cateto 4cm. Nota: resolver un triángulo significa calcular la medida de todos sus lados, alturas y proyecciones.
492. Resuelve el triángulo rectángulo cuyas proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 4cm y 6cm. Nota: resolver un triángulo significa calcular la medida de todos sus lados, alturas y proyecciones.
493. Resuelve el triángulo rectángulo que tiene un cateto de 12cm y su proyección sobre la hipotenusa mide 8cm. Nota: resolver un triángulo significa calcular la medida de todos sus lados, alturas y proyecciones.
494. Calcula la altura y el área de un triángulo con los siguientes datos:  $b=156\text{cm}$ ;  $c=65\text{cm}$ ;  $B=67^\circ$ ;  $C=23^\circ$ .

#### PROBLEMAS CON LOS TEOREMAS DE ALTURA Y CATETOS



495. En una playa hay un rompeolas que sale en perpendicular de la línea de costa. Dando un paseo hasta la punta, me encuentro con mi vecino y nos damos cuenta de que: desde allí nuestras toallas forman un ángulo perpendicular; mi toalla se ve en la arena a la derecha del rompeolas; su toalla se ve, también en la arena, pero a la izquierda del rompeolas. De vuelta a las toallas, medimos las distancias a la base del rompeolas: mi toalla a 100m y la suya a 81m. ¿Cuánto mide el rompeolas? ¿A qué distancia está la punta del rompeolas de cada toalla? Dibuja la situación. Mide los ángulos de la figura con el transportador. ¿Cuánto suman?
496. A la entrada de un puente de 200m de ancho sobre un río veo una especie de islote bajo el puente con un ángulo de  $60^\circ$ . Andados 80m por el puente, veo el islote justo debajo de mí. A la salida del puente veo ahora el islote con un ángulo de  $30^\circ$ . ¿Qué altura tiene el puente sobre el islote? Dibuja la situación. Nota: reflexiona si estás ante un triángulo rectángulo o no.
497. Luis está montado en un globo amarrado al suelo por dos cabos, uno de 10m y el otro de 14m. En el momento en que ambas cuerdas se tensan en sentidos contrarios, Luis observa que forman un ángulo de  $90^\circ$ . Calcula la altura a la que se encuentra el globo.
498. Las dos aguas de un tejado están en perpendicular orientadas al Norte y al Sur respectivamente, dejando debajo una buhardilla. ¿Qué altura máxima tiene la estancia si la cubierta Sur



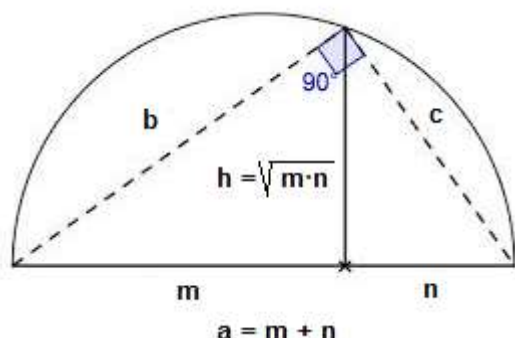
mide 12m y se proyecta en 10m de suelo (proyección ortogonal)?  
¿Cuánto mide la cubierta Norte?

499. Una cometa se amarra al suelo por dos cuerdas que forman un ángulo recto, una de 12m y otra de 8m. ¿A qué altura está la cometa? ¿A qué distancia de la vertical se encuentran sujetas cada una de las cuerdas?

*A kite is tied by two strings to the floor forming a right angle, one of the strings is 12m and the other one is 8m. What height is the kite from the floor? At what distance from the vertical is each of the tied strings?*

#### DIBUJO DE RAÍCES CUADRADAS

La importancia de este ejercicio radica en que, gracias a él, sabemos cómo dibujar CON REGLA Y COMPÁS CUALQUIER distancia dada como RAÍZ CUADRADA (de un número natural).



500. Usando el teorema de la altura, dibuja la  $\sqrt{3}$  a partir de un triángulo rectángulo de proyecciones de los catetos 1cm y 3cm (**como media proporcional de las proyecciones ortogonales de los catetos**). Compara este método con el clásico del teorema de Pitágoras.
501. Usando el teorema de la altura, dibuja la  $\sqrt{6}$  a partir de un triángulo rectángulo de proyecciones de los catetos 2cm y 3cm.
502. Usando el teorema de la altura, dibuja la  $\sqrt{8}$  a partir de un triángulo rectángulo de proyecciones de los catetos 2cm y 4cm.
503. Usando el teorema de la altura, dibuja la  $\sqrt{10}$  a partir de un triángulo rectángulo de proyecciones de los catetos 2cm y 5cm.
504. Usando el teorema de la altura, dibuja la  $\sqrt{18}$  a partir de un triángulo rectángulo que tenga una de las proyecciones de los catetos igual a 6cm.

SEMEJANZAS. MOVIMIENTOS. VECTORES.

INTRODUCCIÓN. Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Qué matemáticas comparten el rostro, una hoja, las mariposas y algunos gemelos?



#### MOVIMIENTOS

(conservan las formas y los tamaños)

Movimientos DIRECTOS (conservan la orientación): traslaciones y giros.

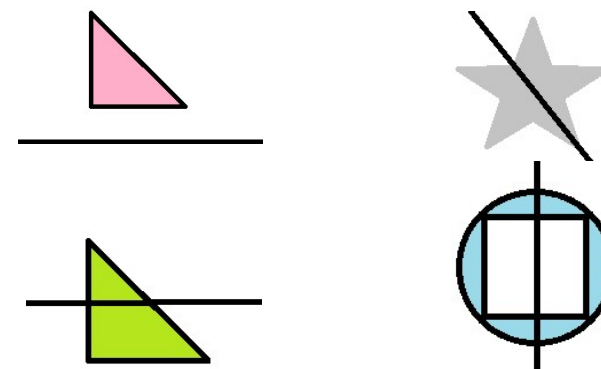
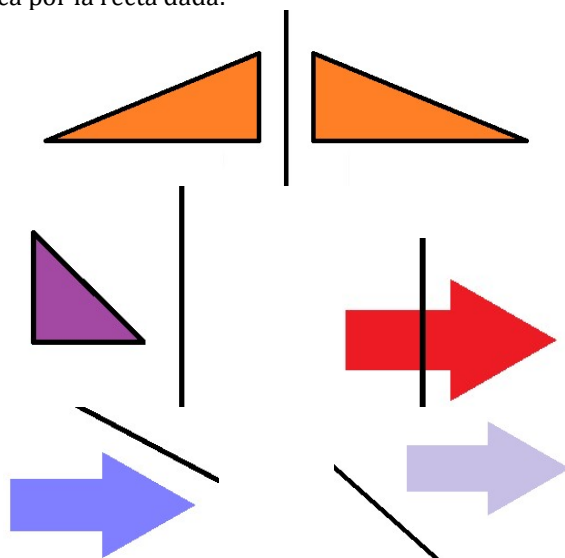




Movimientos INVERSOS (invierten la orientación): simetrías.

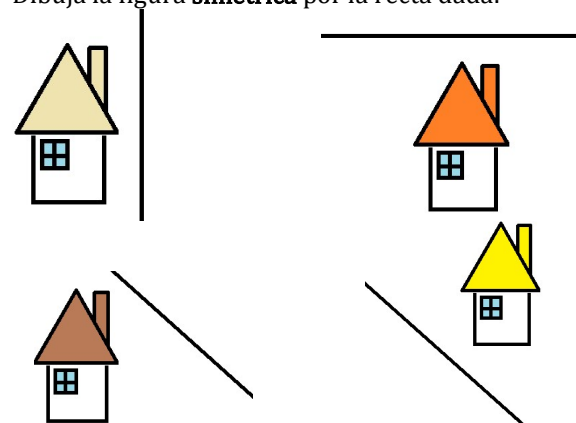


505. Averigua cinco cosas de la naturaleza que posean simetrías. Dibuja ejemplos de ellas.
506. **Simetría axial.** Fijándote en el ejemplo, dibuja tú la figura simétrica por la recta dada:



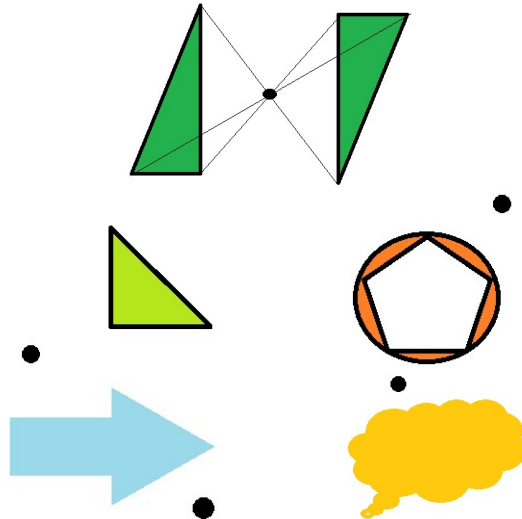
¿Hay alguna figura que permanezca invariante (globalmente) al hacer la simetría?

507. Dibuja la figura **simétrica** por la recta dada:

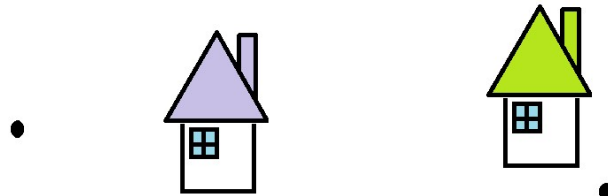


¿Habrá alguna recta en la que los puntos originales de la casita coincidan con sus transformados? Invéntate una figura en la que esto pase.

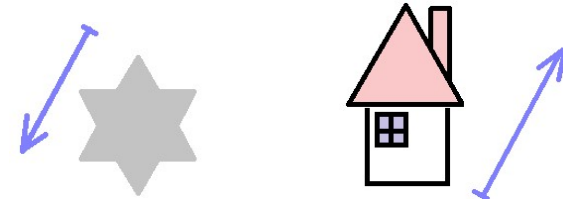
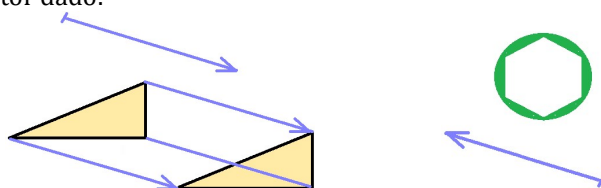
508. **Simetría central (homotecia de razón  $-1$ ).** Fijándote en el ejemplo, dibuja la figura simétrica respecto del punto:



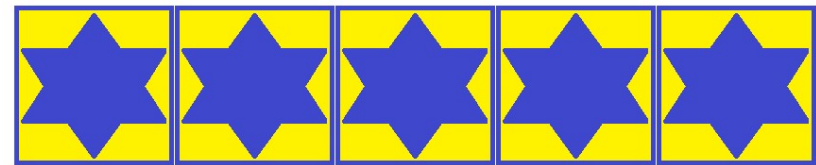
509. Lo mismo con la casita y el punto dado:



510. **Traslación.** Fijándote en el ejemplo, desplaza la figura según el vector dado:



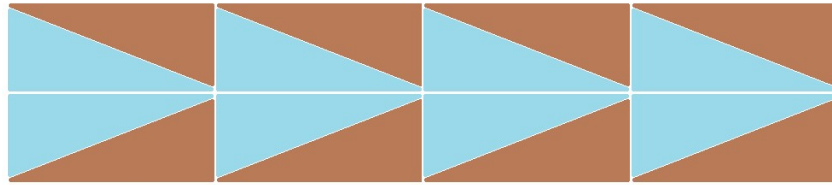
511. **Giro.** Rota la figura de la casita desde la esquina inferior derecha en un ángulo de  $90^\circ$  a favor de las agujas del reloj.
512. **Gira** un ángulo de  $120^\circ$  la flecha roja gorda de los ejercicios anteriores (tomando el centro de giro como la punta de la flecha).
513. **Giro.** Rota la figura de la casita desde un punto exterior a ella con un ángulo de  $60^\circ$  en contra de las agujas del reloj.
514. **Gira** un ángulo de  $70^\circ$  la flecha roja gorda de los ejercicios anteriores (tomando el centro de giro como un punto exterior a ella).
515. Detalla los movimientos que han sido necesarios para hacer el siguiente **friso**:



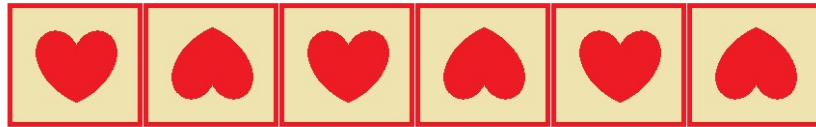
516. Detalla los movimientos que han sido necesarios para hacer el siguiente **friso**:



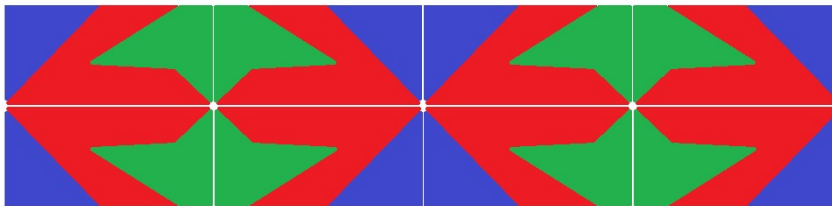
517. Detalla los movimientos que han sido necesarios para hacer el siguiente **friso**:



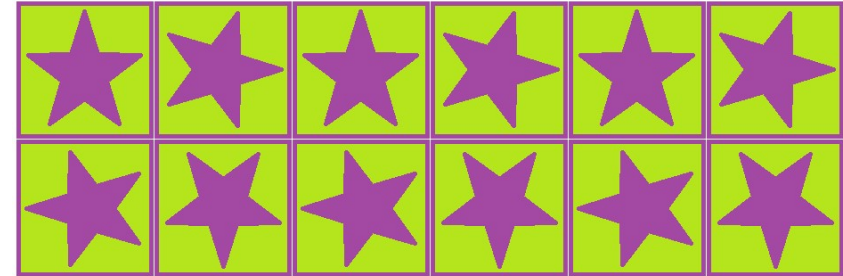
518. Detalla los movimientos que han sido necesarios para hacer el siguiente **fribo**:



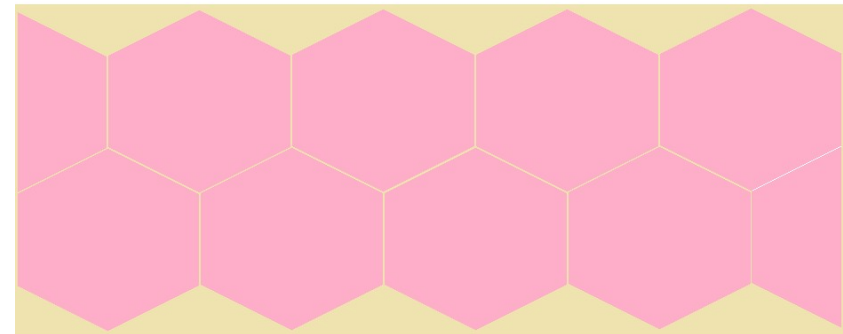
519. Detalla los movimientos que han sido necesarios para hacer el siguiente **fribo**:



520. Detalla los movimientos que han sido necesarios para hacer el siguiente **fribo**:



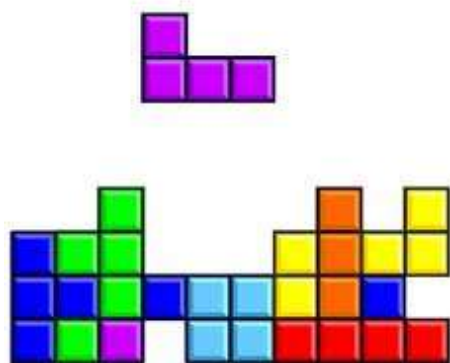
521. Detalla los movimientos que han sido necesarios para hacer el siguiente **fribo**:



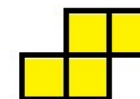
522. Invéntate un **fribo** que emplee dos polígonos distintos.  
 523. Invéntate un **fribo** que emplee tres polígonos distintos.  
 524. Invéntate un **fribo** que emplee dos figuras, una de ellas un pentágono.  
 525. Invéntate un **fribo** que emplee dos polígonos, un cuadrilátero y un hexágono.  
 526. Invéntate un **fribo** que emplee tres polígonos, uno de ellos un triángulo equilátero.



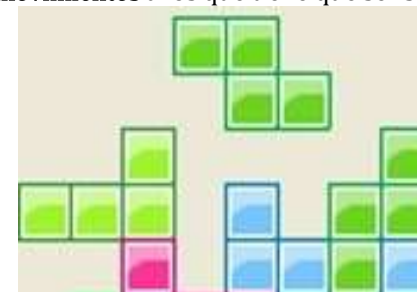
527. Las **teselaciones** son formaciones similares a los frisos pero rellenando todo el plano. Dibuja tres teselaciones: la primera empleando solo un triángulo equilátero; la segunda empleando solo un cuadrado; la tercera empleando solo un hexágono regular.
528. Dibuja una **teselación** empleando dos polígonos de tu elección.
529. Dibuja una **teselación** empleando dos figuras no poligonales.
530. Dibuja una **teselación** empleando dos figuras de tu elección.
531. ¿Qué **movimiento** tiene que hacer la ficha del tetris para entrar en el sitio inmediatamente inferior y puntuar? ¿Y qué tendrá que hacer si quiere ponerse en el hueco de la izquierda?



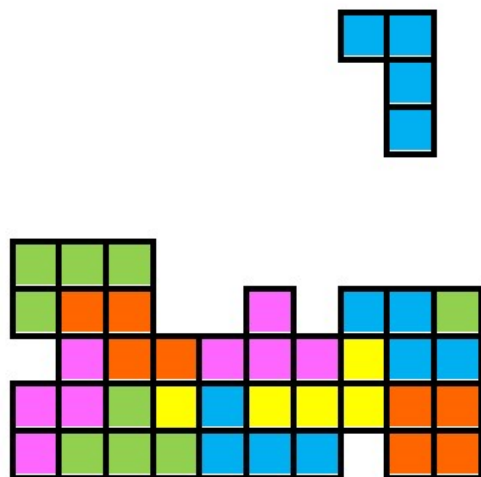
532. ¿Qué opciones tiene de encajar esta ficha del tetris? Da la sucesión de **movimientos** a los que tiene que ser sometida.



533. ¿Qué opciones tiene de encajar esta ficha del tetris? Da la sucesión de **movimientos** a los que tiene que ser sometida.



534. Desarrolla la mejor jugada posible de la siguiente partida de tetris. Dibuja detalladamente la sucesión de **movimientos** que empleas.



535. Partiendo de un simple guion, reflexiona sobre el tipo de movimientos necesarios para crear las siguientes cifras.



### GEOMETRÍA ANALÍTICA

#### RECUERDA

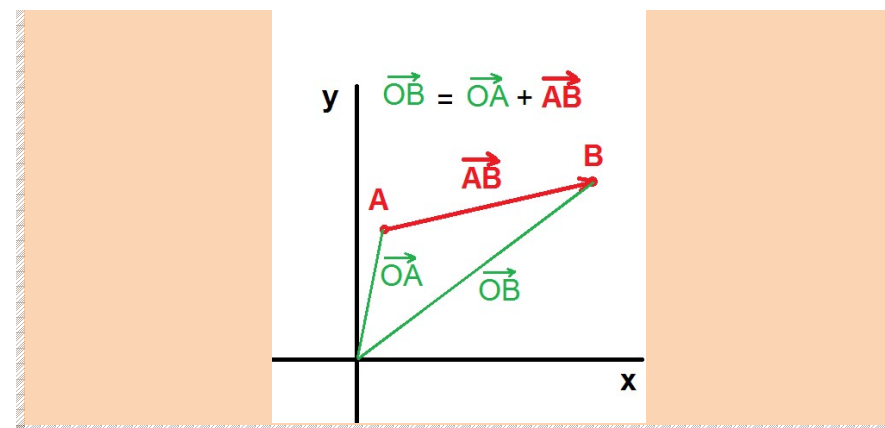
$\vec{v} = (v_x, v_y) \rightarrow$  *vector libre*

$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \rightarrow$  *módulo del vector*

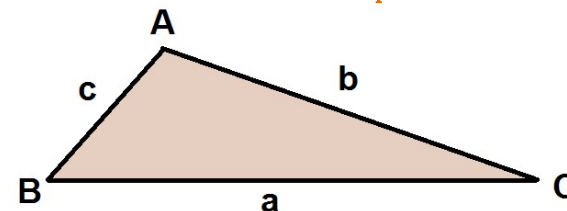
$k \cdot \vec{v} = k \cdot (v_x, v_y) = (k \cdot v_x, k \cdot v_y) \rightarrow$  *multiplicación de vector por escalar*

$\vec{v} + \vec{u} = (v_x, v_y) + (u_x, u_y) = (v_x + u_x, v_y + u_y) \rightarrow$  *suma de dos vectores*

$\vec{v} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (b_x, b_y) - (a_x, a_y) = (b_x - a_x, b_y - a_y)$



#### RECUERDA de cursos pasados



Fórmula de Herón

Área del triángulo  $\rightarrow \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$

Siendo  $s$  el semiperímetro  $\equiv s = \frac{\text{Perímetro}}{2}$

#### PROBLEMAS GEOMÉTRICOS con COORDENADAS

Si eres de aplicadas, usa el teorema de Pitágoras. Si eres de académicas, usa tus conocimientos de vectores.

536. Dibuja el rombo que tiene por vértices los puntos P(2, 1), Q(4, 5), R(8, 7), S(6, 3). Calcula su área. Calcula la medida de sus lados sabiendo que los ejes están en centímetros.





537. Dibuja el trapecio que tiene por vértices los puntos  $A(-2, 0)$ ,  $B(-2, 3)$ ,  $C(4, 3)$ ,  $D(6, 0)$ . ¿De qué tipo es este trapecio? Calcula su área. Calcula la medida de sus lados sabiendo que los ejes están en centímetros.

538. Dibuja el triángulo ABC que tiene por vértices los siguientes puntos:  $A(5, -2)$ ,  $B(1, 6)$ ,  $C(-3, -2)$ . ¿De qué tipo es? Halla el perímetro de esta figura. Calcula la distancia a la que se encuentra el baricentro de la base de este triángulo. Nota: tendrás que usar una propiedad especial de los puntos notables en este tipo de triángulos.

539. Dibuja el trapecio que tiene por vértices los puntos  $A(-4, -1)$ ,  $B(-3, 4)$ ,  $C(2, 4)$ ,  $D(7, -1)$ . ¿De qué tipo es este trapecio? Calcula su área. Calcula la medida de sus lados sabiendo que los ejes están en centímetros.

540. Dibuja el cuadrilátero ABCD que tiene por vértices los puntos  $A(4, -1)$ ,  $B(0, 6)$ ,  $C(-5, 6)$ ,  $D(-2, -1)$ . ¿De qué tipo es? Halla el perímetro de esta figura. Calcula su área.

541. Dibuja el cuadrilátero ABCD que tiene por vértices los puntos  $A(2, -2)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(1, 6)$ ,  $D(-3, 0)$ . ¿De qué tipo es? Halla el perímetro de esta figura. Calcula su área. Nota: si no hay fórmula especial, tienes que calcular el área por triangulación (ayudándote de la fórmula de Herón), para lo que necesitarás primero hallar la longitud de una diagonal.

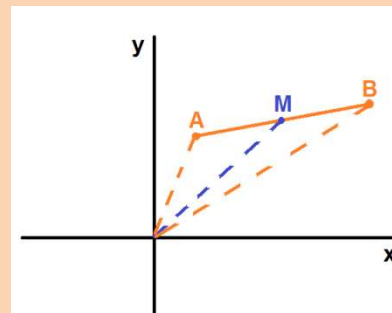
542. Dibuja el pentágono ABCDE que tiene por vértices los puntos  $A(3, -3)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(-1, 6)$ ,  $D(-4, 4)$ ,  $E(-3, 0)$ . Halla el perímetro de esta figura. Calcula su área por triangulación.

543. Dibuja el hexágono ABCDEF que tiene por vértices los puntos  $A(2, -1)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(-1, 5)$ ,  $D(-5, 6)$ ,  $E(-6, 2)$ ,  $F(-3, 0)$ . Halla el perímetro de esta figura. Calcula su área por triangulación.

544. Dibuja los puntos  $A(6, 2)$ ,  $B(2, 4)$ ,  $C(2, 3)$ ,  $D(-4, 3)$ ,  $E(-4, 4)$ ,  $F(-8, 2)$ ,  $G(-4, 0)$ ,  $H(-4, 1)$ ,  $I(2, 1)$ ,  $J(2, 0)$  y traza las líneas por orden alfabético para conseguir una figura cerrada (ABCDEFGHJI). Halla su perímetro. Halla su área.

### PUNTO MEDIO de un segmento $\overline{AB}$

El punto medio entre  $A(a_x, a_y)$  y  $B(b_x, b_y)$  es  $M\left(\frac{a_x+b_x}{2}, \frac{a_y+b_y}{2}\right)$



545. Calcula el punto medio del segmento  $\overline{AB}$  sabiendo las coordenadas de  $A(2, -10)$  y  $B(5, 6)$ .

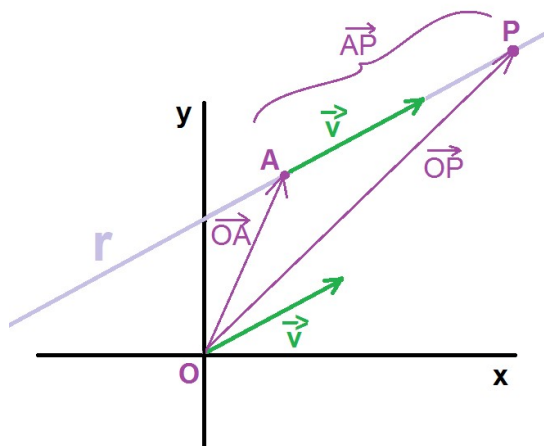
546. Calcula el punto medio del segmento  $\overline{AB}$  sabiendo las coordenadas de  $A(-3, -2)$  y  $B(-4, 7)$ .

547. Dibuja el triángulo ABC que tiene por vértices los siguientes puntos:  $A(4, -3)$ ,  $B(3, 5)$ ,  $C(-5, -1)$ . ¿De qué tipo es? Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo. Hazlo de dos formas distintas: a) empleando la fórmula del punto medio; b) usando la suma de dos vectores adecuados.

548. Dibuja el triángulo ABC que tiene por vértices los siguientes puntos:  $A(5, -4)$ ,  $B(4, 4)$ ,  $C(-6, 0)$ . ¿De qué tipo es? Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo. Hazlo de dos formas distintas: a) empleando la fórmula del punto medio; b) usando la suma de dos vectores adecuados.

### RECUERDA la recta $r$ formada por puntos $P(x, y)$

$r$  pasa por el punto  $A(a_x, a_y)$  y tiene a  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  como vector director



Ecuación vectorial

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow r \equiv (x, y) = (a_x, a_y) + \lambda \cdot (v_x, v_y)$$

Ecuaciones paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = a_x + \lambda \cdot v_x \\ y = a_y + \lambda \cdot v_y \end{cases}$$

Ecuación continua

$$r \equiv \frac{x - a_x}{v_x} = \frac{y - a_y}{v_y}$$

Ecuación general o implícita

$$r \equiv ax + by + c = 0$$

Ecuación explícita o punto-pendiente

$$r \equiv y = mx + n$$

RECUERDA

Pendiente de la recta  $m = \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{a}{b}$

549. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(3, -1) y tiene a  $\vec{v} = (-2, 2)$  como vector director. Además, da la

pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

550. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(-2, 0) y tiene a  $\vec{v} = (-1, -4)$  como vector director. Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

551. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(-6, -5) y tiene a  $\vec{v} = (0, -3)$  como vector director. Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

552. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(0, 0) y tiene a  $\vec{v} = (-7, 0)$  como vector director. Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

**Sacando previamente el vector director a partir de dos puntos dados.** Tú ya aprendiste en otros cursos a obtener la ecuación explícita  $y=mx+n$  de la recta que pasa por dos puntos: bien contando cuadritos, bien a través de un sistema de dos ecuaciones. Ahora se te pide que lo hagas con vectores y saques **TODAS** las ecuaciones de la recta.

553. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(-1, -4) y B(2, 1). Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

554. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(2, -2) y B(-7, -3). Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

555. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(5, 0) y B(0, -2). Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

556. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(2, -2) y B(-7, -3). Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

**RECUERDA sobre paralelismo**

Vectores:  $\vec{v} \parallel \vec{u}$  si se cumple  $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$



**Rectas:**  $r \parallel s$  si se cumple  $m_r = m_s$

**Con vector paralelo.**

557. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(-3, -4)$  y cuyo vector director es paralelo al vector  $\vec{u} = (6, -8)$ .

Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

558. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(9, 0)$  y cuyo vector director es paralelo al vector  $\vec{u} = (-2, -3)$ .

Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

559. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(0, -4)$  y cuyo vector director es paralelo al vector  $\vec{u} = (0, 5)$ .

Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

**Con pendientes.** Tú ya aprendiste en otro curso, a través de un sistema de dos ecuaciones, a obtener la ecuación explícita  $y=mx+n$  de la recta que pasa por un punto y es paralela a otra. Ahora se te pide que lo hagas con vectores y saques **TODAS** las ecuaciones de la recta.

560. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(-1, -1)$  y es paralela a la recta  $y=-5x+1$ . Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

561. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(-6, 5)$  y es paralela a la recta  $y=x+2$ . Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

562. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(2, 1)$  y es paralela a la recta  $y=-7x$ . Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

**RECUERDA sobre perpendicularidad de vectores**

**Vectores:**  $\vec{v} \perp \vec{w}$  si se cumple  $v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y = 0$

**Ejemplo:**  $\vec{v} = (3, -2)$  es un vector perpendicular a  $\vec{w} = (-2, 3)$  porque  $3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 = 0$ .

563. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(-4, -3)$  y cuyo vector director es perpendicular al vector  $\vec{w} = (1, -2)$ . Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

564. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(-1, 5)$  y cuyo vector director es perpendicular al vector  $\vec{w} = (6, 0)$ . Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

565. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(0, -2)$  y cuyo vector director es perpendicular al vector  $\vec{w} = (-1, -1)$ . Además, da la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta respecto a la horizontal.

**RECUERDA sobre perpendicularidad de rectas**

**Rectas:**  $r \perp s$  si se cumple  $m_s = -\frac{1}{m_r}$

**Ejemplo:**  $r \equiv y = 5x + 2$  es perpendicular a  $s \equiv y = -\frac{1}{5}x + 2$

566. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(-1, 0)$  y es perpendicular a la recta  $y=4x+3$ . Además, da las pendientes y los ángulos de inclinación de ambas rectas respecto a la horizontal.

567. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(2, -3)$  y es perpendicular a la recta  $y=-2x-1$ . Además, da las pendientes y los ángulos de inclinación de ambas rectas respecto a la horizontal.

568. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(0, 0)$  y es perpendicular a la recta  $y=-6x$ . Además, da las pendientes y los ángulos de inclinación de ambas rectas respecto a la horizontal.

569. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto  $A(-1, -5)$  y es perpendicular a la recta  $y = -\frac{2}{3}x + 4$ . Además, da las



pendientes y los ángulos de inclinación de ambas rectas respecto a la horizontal.

570. Da las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(1, 1) y es perpendicular a la recta  $y=-5$ . Además, da las pendientes y los ángulos de inclinación de ambas rectas respecto a la horizontal.

### ECUACIONES DE VECTORES

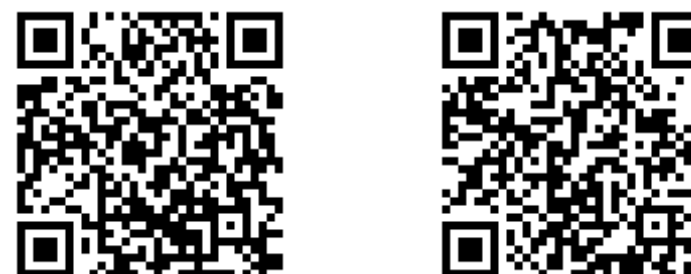


571. Calcula a y b para que la siguiente igualdad sea cierta:  $3 \cdot \vec{u} + \vec{v} - 2 \cdot \vec{n} = \vec{m}$  sabiendo que  $\vec{u} = (-1, 9)$ ,  $\vec{v} = (-2, a)$ ,  $\vec{n} = (7, 2)$ ,  $\vec{m} = (b, -5)$ .
572. Calcula a y b para que la siguiente igualdad sea cierta:  $3 \cdot \vec{v} + \vec{w} = 2 \cdot \vec{u}$ , sabiendo que  $\vec{u} = (a, 2)$ ,  $\vec{v} = (-1, b)$ ,  $\vec{w} = (-a, 5b)$ .
573. Calcula a y b para que la siguiente igualdad sea cierta:  $-\frac{1}{2} \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} - \vec{n} = \frac{3}{2} \cdot \vec{m}$  sabiendo que  $\vec{u} = (-6, 0)$ ,  $\vec{v} = (-1, a)$ ,  $\vec{n} = (7, 2)$ ,  $\vec{m} = (b, -4)$ .
574. Calcula a y b para que la siguiente igualdad sea cierta:  $-2 \cdot \vec{u} + \vec{v} - 3 \cdot \vec{n} = 4 \cdot \vec{m}$  conociendo los vectores  $\vec{u} = (0, -a)$ ,  $\vec{v} = (-1, a)$ ,  $\vec{n} = (-2, \frac{1}{3})$ ,  $\vec{m} = (b, \frac{3}{4})$ .
575. Calcula a y b para que la siguiente igualdad sea cierta:  $-3 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} - 5\vec{n} = \frac{1}{3} \cdot \vec{m}$  sabiendo que  $\vec{u} = (-2, -1)$ ,  $\vec{v} = (-b, a)$ ,  $\vec{n} = (0, 1)$ ,  $\vec{m} = (6a, -3b)$ .

576. Calcula a y b para que la siguiente igualdad sea cierta:  $-\frac{1}{3} \cdot \vec{u} - \frac{1}{2} \cdot \vec{v} = \frac{-2}{3} \cdot \vec{w} - 3 \cdot \vec{z}$  sabiendo que  $\vec{u} = (12b, -3)$ ,  $\vec{v} = (4, 2a)$ ,  $\vec{z} = (-a, -b)$ ,  $\vec{w} = (-3b, -2)$ .

### DIBUJO DE SEMEJANZAS

Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Qué matemáticas unen al rostro, a una hoja, a las mariposas y a algunos gemelos? ¿En qué se parecen un artesano, un escultor, un arquitecto y la Fábrica de Monea y Timbre? ¿Qué matemáticas tienen en común un perro, un remolque, el Universo y un edredón?



577. Dibuja el punto A(2, -3) y su simétrico por la recta  $y=x$ .
578. Dibuja el triángulo ABC con vértices en los puntos A(4, 1), B(2, -5), C(-3, -1), cada vértice y cada lado de un color distinto.



Dibuja el triángulo ABC anterior trasladado el vector  $\vec{v}=(2, 3)$  y da las coordenadas de sus nuevos vértices DEF, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Dibuja con regla y compás el triángulo GHI simétrico a este último por el punto  $P(-4, 2)$  (es decir, la homotecia de centro P y razón  $-1$ ; o el giro de centro P y ángulo  $180^\circ$ ) y da las coordenadas de sus nuevos vértices, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Dibuja el triángulo simétrico al ABC por la recta  $x=-5$ , dando las coordenadas de sus nuevos vértices JLK, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Gira el triángulo ABC desde el origen de coordenadas un ángulo de  $100^\circ$  y da sus nuevos vértices MNÑ, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. ¿Cuáles de estas transformaciones son directas y cuáles inversas (es decir, conservan o no la orientación de la figura)?

579. Dibuja el trapecio que tiene por vértices los puntos  $A(-4, 0)$ ,  $B(-2, 3)$ ,  $C(4, 3)$ ,  $D(6, 0)$ , cada vértice y cada lado de un color distinto. ¿De qué tipo es? Dibuja el trapecio ABCD anterior trasladado el vector  $\vec{v}=(2, -2)$  y da las coordenadas de sus nuevos vértices EFGH, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Dibuja con regla y compás el trapecio IJKL simétrico a este último por el punto  $P(-1, -1)$  y da las coordenadas de sus nuevos vértices, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Dibuja el trapecio simétrico al ABCD por la recta  $y=-2$ , dando las coordenadas de sus nuevos vértices MNÑQ, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Gira el trapecio ABCD desde el origen de coordenadas un ángulo de  $60^\circ$  y da sus nuevos vértices RSTV, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Del trapecio ABCD, dibuja la homotecia de centro el punto  $U(-3, -4)$  y razón  $R=2$ , dando las coordenadas de los nuevos vértices WXYZ, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. ¿Cuáles de estas transformaciones son directas y cuáles inversas (es decir, conservan o no la orientación de la figura)?

580. Dibuja el triángulo ABC de vértices  $A(-4, 0)$ ,  $B(0, 5)$ ,  $C(3, 0)$ , cada vértice y cada lado de un color distinto. Traslada la figura ABC el

vector  $\vec{v}=(-1, 3)$  y da las coordenadas de sus nuevos vértices DEF, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Dibuja con regla y compás el triángulo simétrico a este último por el punto  $P(1, 2)$  y da las coordenadas de sus nuevos vértices GHI, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Dibuja el triángulo simétrico al ABC por la recta  $x=-3$ , dando las coordenadas de sus nuevos vértices JLK, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Gira el triángulo ABC desde el origen de coordenadas un ángulo de  $30^\circ$  y da sus nuevos vértices MNÑ, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Del triángulo ABC, dibuja la homotecia de centro el origen de coordenadas y razón  $R=3$ , dando las coordenadas de los nuevos vértices PQR, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. ¿Cuáles de estas transformaciones son directas y cuáles inversas (es decir, conservan o no la orientación de la figura)?

581. Traslada el triángulo ABC de vértices  $A(-1, -1)$ ,  $B(-2, 1)$ ,  $C(0, 0)$  un vector  $\vec{v}=(-3, 2)$  y da las coordenadas de sus nuevos vértices DEF, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Dibuja con regla y compás el triángulo simétrico a este último por el punto  $P(-1, -2)$  y da las coordenadas de sus nuevos vértices GHI, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Dibuja el triángulo simétrico al ABC por la recta  $y=x-2$ , dando las coordenadas de sus nuevos vértices JLK, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Gira el triángulo ABC desde el origen de coordenadas un ángulo de  $45^\circ$  y da sus nuevos vértices MNÑ, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. ¿Cuáles de estas transformaciones son directas y cuáles inversas (es decir, conservan o no la orientación de la figura)?

582. Dibuja con colores el rombo PQRS que tiene por vértices los puntos  $P(1, 2)$ ,  $Q(7, 0)$ ,  $R(1, -2)$ ,  $S(-5, 0)$ . Dibuja el rombo trasladado el vector  $\vec{v}=(4, -2)$  y da las coordenadas de sus vértices ABCD, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. Dibuja el rombo simétrico a este último por la recta  $y=x+1$ , dando las coordenadas de sus vértices LMÑÑ, usando los mismos colores para vértices y





lados homólogos. Calcula la medida de sus lados usando Pitágoras y sabiendo que los ejes están en centímetros. ¿Cuáles de estas transformaciones son directas y cuáles inversas (es decir, conservan o no la orientación de la figura)?

583. Dibuja con colores el rombo ABCD que tiene por vértices los puntos A(-2,1), B(-6, -1), C(-2, -3), D(2, -1). Se pide: a) dibuja el simétrico a ABCD por la recta  $y=-x+2$  y da las coordenadas de los nuevos vértices EFGH, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos; b) traslada la figura ABCD un  $\vec{v} = (-4, 3)$  y da las coordenadas de sus nuevos vértices IJKL, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos; c) del rombo ABCD, dibuja la homotecia de centro el punto Z(3,3) y razón  $R=2$ , dando las coordenadas de los nuevos vértices MNÑP, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos; d) gira la figura ABCD un ángulo de  $120^\circ$  desde el punto P(-5, -5), usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. ¿Cuáles de estas transformaciones son directas y cuáles inversas (es decir, conservan o no la orientación de la figura)?

584. Dibuja con colores el rectángulo ABCD que tiene por vértices los puntos A(-4,2), B(-4, -2), C(4, -2), D(4, 2). Se pide: a) dibuja el simétrico a ABCD por la recta  $x=1$  y da las coordenadas de los nuevos vértices EFGH, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos; b) dibuja el simétrico a ABCD por la recta  $x=0$  y da las coordenadas de los nuevos vértices IJKL, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos; c) del rectángulo ABCD, dibuja la homotecia de centro el origen de coordenadas y razón  $R=2$ , dando las coordenadas de los nuevos vértices MNÑP, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. ¿Cuáles de estas transformaciones son directas y cuáles inversas (es decir, conservan o no la orientación de la figura)? ¿Hay algún conjunto de puntos globalmente invariante? ¿Has detectado algún eje de simetría?

585. Dibuja con colores el triángulo isósceles ABC que tiene por vértices los puntos A(-5, -3), B(-1, -3), C(-3,6). Se pide: a) dibuja el simétrico a ABC por la recta  $y=-x+6$  y da las coordenadas de los

nuevos vértices DEF, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos; b) dibuja el simétrico a DEF por la recta  $y=x-1$  y da las coordenadas de los nuevos vértices GHI, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos; c) del triángulo GHI, dibuja la homotecia de centro el origen de coordenadas y razón  $R=-2$ , dando las coordenadas de los nuevos vértices JKL, usando los mismos colores para vértices y lados homólogos. ¿Cuáles de estas transformaciones son directas y cuáles inversas (es decir, conservan o no la orientación de la figura)? ¿Hay algún conjunto de puntos globalmente invariante? ¿Has detectado algún eje de simetría?

586. Describe las transformaciones que observas en estas ilustraciones. Investiga en internet sobre los mosaicos de la Alhambra y las teselaciones de Escher.



587. Investiga en internet sobre la técnica de la anamorfosis:



### PROBLEMAS DE SEMEJANZAS

588. Dibuja el triángulo ABC que tiene por vértices los puntos A(4,0), B(0, -5), C(-3, 0). ¿Cuánto miden sus tres lados (usa Pitágoras)? Calcula su área. ¿Qué área tendrá un triángulo tres veces mayor y cuánto medirán sus lados (no tienes que dibujarlo)?
589. Dibuja el rombo PQRS que tiene por vértices los puntos P(1,2), Q(7,0), R(1, -2), S(-5,0). Calcula su área. ¿Qué área tendrá un rombo tres veces mayor (no tienes que dibujarlo)? ¿Cuánto medirán sus diagonales?
590. Dibuja el triángulo ABC que tiene por vértices los puntos siguientes: A(5, -2), B(-1,6), C(-3, -2). ¿Cuánto miden sus tres lados? Calcula su área. ¿Qué área tendrá un triángulo tres veces mayor y cuánto medirán sus lados (no tienes que dibujarlo).
591. Dibuja el cuadrilátero PQRS que tiene por vértices los puntos P(1,2), Q(6,0), R(-1, -2), S(-5, -1). ¿De qué tipo es? Halla el área y el perímetro del transformado de esta figura por una homotecia de razón 1,5. Nota: no tienes que dibujar el transformado.

592. Dibuja el hexágono ABCDEF que tiene por vértices los puntos A(2, -1), B(2, 3), C(-1,5), D(-5, 6), E(-4, 2), F(-3, 1). Halla el área y el perímetro del transformado de este hexágono por una homotecia de razón 2,5. Nota: no tienes que dibujar el transformado.
593. Dibuja el transformado por una homotecia de razón R=0,5 y centro C(0, 0) de la figura cerrada que tiene por vértices puntos los A(6, 2), B(2, 4), C(2, 3), D(-4, 3), E(-4, 4), F(-8, 2), G(-4, 0), H(-4, 1), I(2, 1), J(2, 0). Halla el perímetro de la nueva figura a partir del perímetro de la figura original. Halla el área de la nueva figura y calcula el área de la figura original a partir del área de la nueva figura. Nota: quizás ya tengas algún dato de un ejercicio anterior, pues esta figura ya se ha trabajado anteriormente.

### LUGARES GEOMÉTRICOS CON VECTORES

(Mediatrices y cónicas: circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas)

$$\text{Mediatriz} \Rightarrow \|\overrightarrow{PA}\| = \|\overrightarrow{PB}\|$$

$$\text{Circunferencia} \Rightarrow \|\overrightarrow{PC}\| = d$$

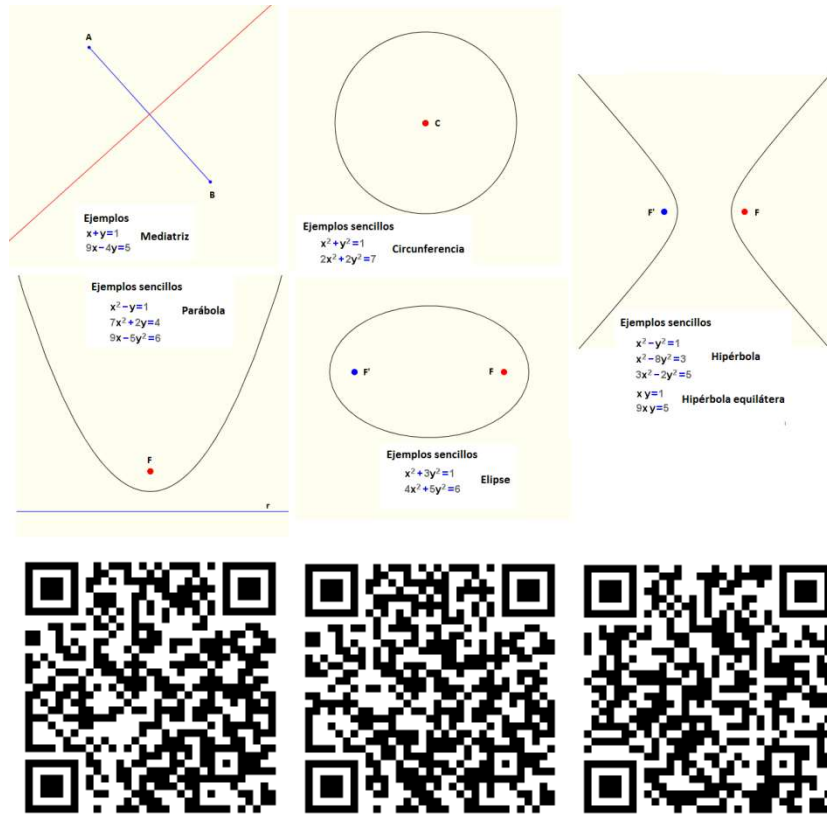
$$\text{Parábola} \Rightarrow \|\overrightarrow{PF}\| = \text{distancia}(P, r)$$

$$\text{Elipse}^3 \Rightarrow \|\overrightarrow{PF'}\| + \|\overrightarrow{PF}\| = d$$

$$\text{Hipérbola}^4 \Rightarrow \|\overrightarrow{PF'}\| - \|\overrightarrow{PF}\| = d$$

<sup>3</sup> La distancia  $d = 2a$ , siendo  $a$  la medida del semieje mayor de la elipse ( $2a$  es la mayor distancia entre dos puntos opuestos de la elipse) y  $2a > \|\overrightarrow{FF'}\|$ .

<sup>4</sup> La distancia  $d = 2a$ , siendo  $a$  la medida del semieje mayor de la hipérbola ( $2a$  es la menor distancia entre dos puntos opuestos de la hipérbola) y  $2a < \|\overrightarrow{FF'}\|$ .



594. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** cinco unidades del punto  $C(0, 0)$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?
595. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** de los puntos  $A(2, 3)$  y  $B(-1, 4)$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?

596. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** dos unidades del punto  $C(-3, 5)$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?
597. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** del  $F(0, 3)$  y de la recta  $r \equiv y=-1$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?
598. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que mantienen constantes (a diez unidades) la **suma** de distancias a los puntos  $F(0, 4)$  y  $F'(0, -4)$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?
599. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que mantienen constantes (a seis unidades) la **diferencia** de distancias a los puntos  $F(0, 4)$  y  $F'(0, -4)$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?
600. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** cuatro unidades del punto  $C(2, -7)$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?
601. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** de los puntos  $A(-5, 0)$  y  $B(-3, -6)$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?
602. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** cinco unidades del punto  $C(-3, -1)$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?
603. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** del punto  $F(-4, 4)$  y de la recta  $r \equiv x=3$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?
604. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que mantienen constantes (a doce unidades) la **suma** de distancias a los puntos  $F(-4, 2)$  y  $F'(1, -3)$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?
605. Halla la expresión algebraica del lugar geométrico de los puntos del plano que mantienen constantes (a 3 unidades) la



**diferencia** de distancias a los puntos  $F(-1, -1)$  y  $F'(2, 2)$ . ¿Cómo se llama este lugar geométrico?

## POLIEDROS Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Con Pitágoras  
With Pythagoras

### RECUERDA

Un **poliedro** es la región cerrada del espacio delimitada por polígonos que se llaman **caras**. Las caras confluyen en puntos llamados **vértices**. Dos caras comparten un segmento de recta llamado **arista**. El segmento de recta entre dos vértices que no pertenecen a una misma cara se llama **diagonal**.

**INTRODUCCIÓN.** Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Acabó Pericles con la peste que asolaba Atenas usando matemáticas?

**INTRODUCTION.** Enter the web site and look for the mathematical question => Did Pericles put an end to the plague that was devastating Athens by using mathematics?

### RECUERDA

#### LAS CLASIFICACIONES DE POLIEDROS REMEMBER THE CLASSIFICATION OF POLYHEDRONS

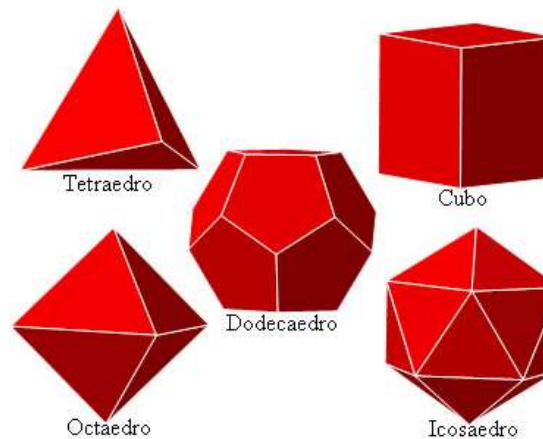
1ª CLASIFICACIÓN: regulares y NO regulares

1<sup>ST</sup> CLASSIFICATION: regular and non-regular.

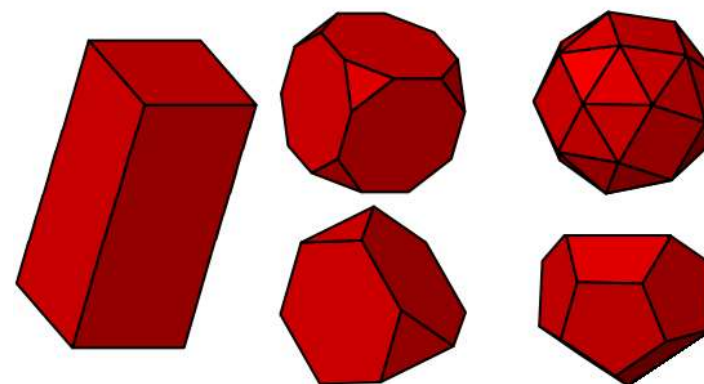
**Poliedro regular** => poliedro que tiene el mismo polígono regular en todas las caras y el mismo número de caras confluyendo en todos los vértices. Solo existen cinco poliedros regulares posibles: tetraedro (4 triángulos equiláteros, 3 caras por vértice), cubo o hexaedro (6 cuadrados, 3 caras por vértice), octaedro (8 triángulos equiláteros, 4 caras por vértice), dodecaedro (12 pentágonos regulares, 3 caras por vértice) e icosaedro (20 triángulos equiláteros, 5 caras por vértice).

**Poliedro no regular (irregular)** => en caso contrario.

### POLIEDROS REGULARES



### POLIEDROS NO REGULARES



### RECUERDA





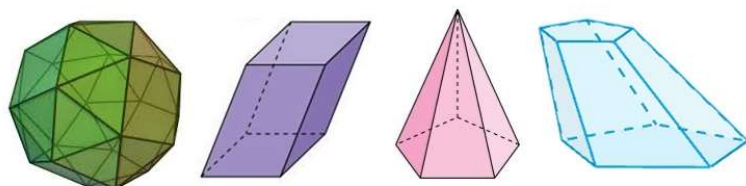
2ª CLASIFICACIÓN: convexos y cóncavos.

2nd CLASSIFICATION: *convex and concave.*

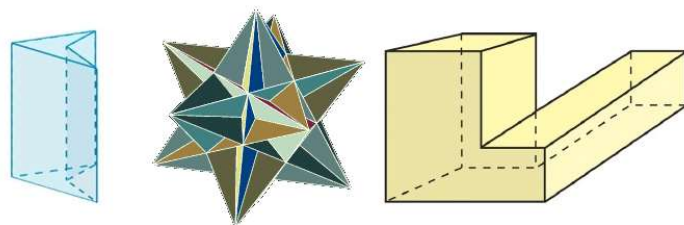
**Poliedro convexo** => poliedro que puede apoyarse sobre cualquiera de sus caras. Estos poliedros contienen a todos los segmentos obtenidos de unir dos cualesquiera de sus puntos. Por tanto, también contienen a todas sus diagonales (obviamente, si tiene diagonales).

**Poliedro cóncavo** => en caso contrario.

CONVEXOS



CÓNCAVOS



RECUERDA

3ª CLASIFICACIÓN: prismas, pirámides y otros

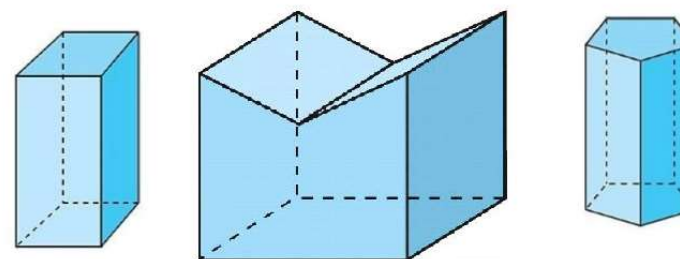
3rd CLASSIFICATION: *prisms, pyramids and others.*

**Prisma** => poliedro resultante de trasladar un polígono. Por tanto, tienen dos bases iguales y las caras laterales en forma de paralelogramos (no necesariamente iguales).

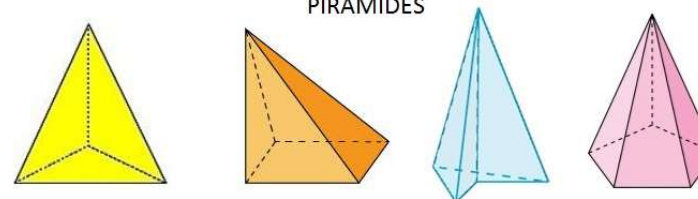
**Pirámide** => poliedro de una sola base y caras laterales triángulos (no necesariamente iguales ni necesariamente isósceles) coincidentes en un punto llamado cúspide, ápice o vértice de la pirámide.

**Otro** => caso de no ser ni prismas ni pirámide.

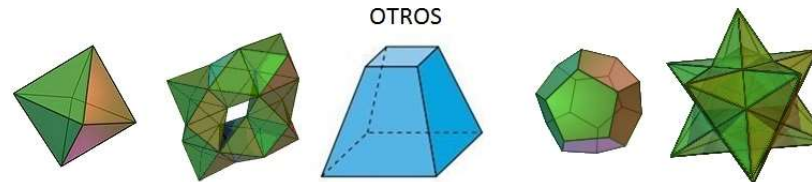
PRISMAS



PIRÁMIDES



OTROS



RECUERDA DE PRISMAS





**Prisma recto** => prisma cuyas bases son perpendiculares a las caras laterales. Por tanto, las caras laterales son rectángulos (no necesariamente iguales y, ocasionalmente, cuadrados).

**Prisma oblicuo** => cuando el prisma no es recto.

**Paralelepípedo** => son prismas de bases paralelogramos (por tanto tiene todas sus caras paralelas dos a dos).

**Ortoedro** => es un paralelepípedo con bases rectangulares o cuadradas y con las aristas laterales perpendiculares a las bases.

**Prisma regular** => aquel prisma que tiene por bases un polígono regular.

**Prisma regular recto** => aquel prisma que tiene por bases un polígono regular y, además, las caras laterales son perpendiculares a ellas.

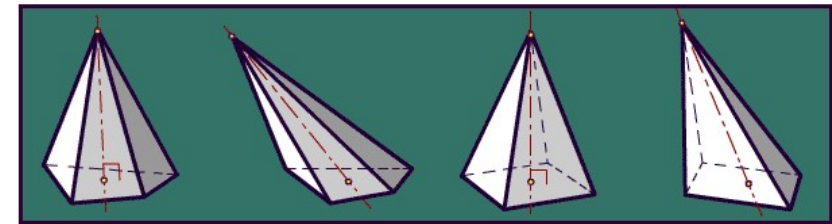
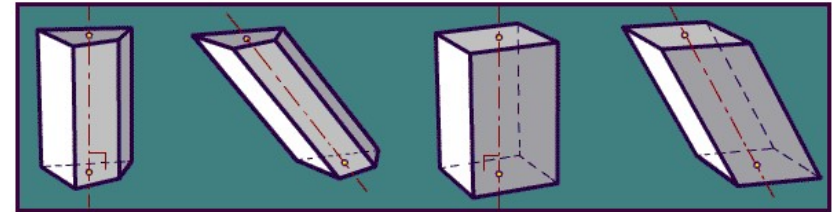
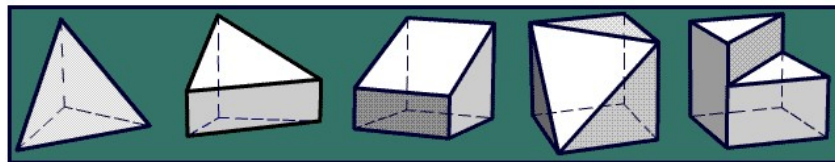
#### RECUERDA DE PIRÁMIDES

**Pirámide recta** => pirámide cuyas caras laterales son triángulos isósceles (no necesariamente iguales).

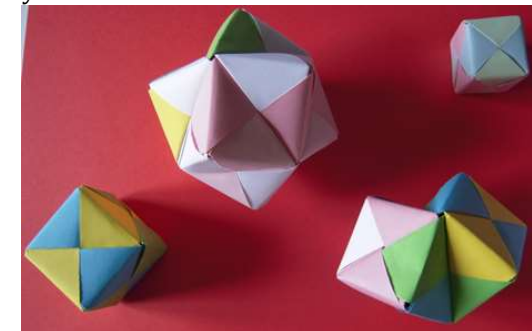
**Pirámide oblicua** => cuando la pirámide no es recta.

**Pirámide regular** => aquella pirámide que tiene por base un polígono regular y, además, el ápice (cúspide o vértice) se encuentra sobre el centro de ese polígono regular (centro de la circunferencia circunscrita al polígono). En consecuencia, la pirámide regular tiene todas las caras laterales iguales y en forma de triángulos isósceles.

606. Clasifica las siguientes tandas de poliedros en cada una de las categorías estudiadas.



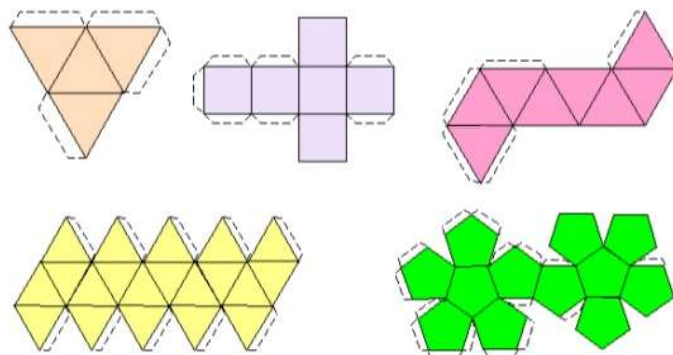
607. Entra en la página web de estenmáticas ([www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es)) y métete en la sección de miscelánea. Allí encontrarás instrucciones para hacer poliedros con **papiroflexia**. Elige uno y hazlo usando folios de colores.



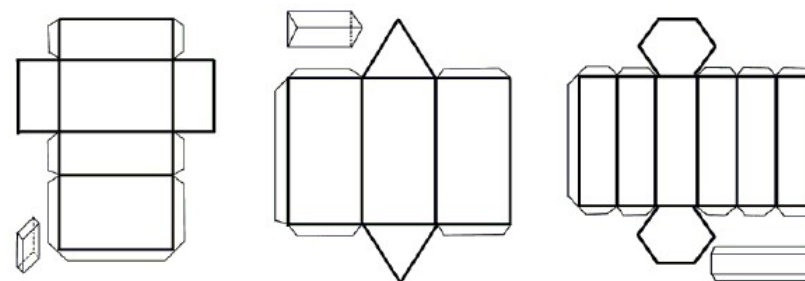
DESARROLLOS  
POLYHEDRON NETS



608. ¿De qué poliedro regular es cada uno de estos desarrollos?  
Dibuja y monta en papel dos de las cinco figuras.



Prismas  
Prisms



609. Dibuja el boceto del desarrollo de un **prisma** triangular regular de aristas laterales 9cm y aristas de la base 3cm. Ahora dibuja la figura fielmente en una hoja suelta para recortarla y montarla (sin olvidarte de las pestañas). ¿Qué tipo de polígono tiene por caras este prisma? ¿Son todas iguales? ¿Observas algún plano de simetría?
- Draw accurately the net of a regular triangular **prism** with regular lateral edges of 9cm and base edges of 3cm. What type of polygon has this prism got as sides? Are all of them equal? Can you see any plane of symmetry?*
610. Dibuja el boceto del desarrollo de un **prisma** rectangular recto (ortopedro) de aristas laterales 12cm y aristas de la base siguientes: 3cm y 5cm. Ahora dibuja la figura fielmente en una hoja suelta para recortarla y montarla (sin olvidarte de las pestañas). ¿Qué tipo de polígono tiene por caras este prisma? ¿Son todas iguales? ¿Observas algún plano de simetría?
- Draw accurately the net of a right rectangular **prism** (rectangular cuboid) with lateral edges of 12cm and the following base edges: 3cm and 5cm. What type of polygon has this prism got as sides? Are all of them equal? Cut the shape and make it up (don't forget the flaps). Can you see any plane of symmetry?*
611. **Resuelto en youtube.** Dibuja el boceto del desarrollo de este paralelepípedo: un **prisma** romboidal recto de aristas laterales 7cm y diagonales de la base siguientes: 4cm y 3cm. ¿Cuánto miden las



aristas de la base? Ahora dibuja la figura fielmente en una hoja suelta para recortar y montarla (sin olvidarte de las pestañas). ¿Qué tipo de polígono tiene por caras este prisma? ¿Son todas iguales? ¿Observas algún plano de simetría?

*Draw accurately the net of a right rhomboid **prism** with lateral edges of 7cm and the following base diagonals: 4cm and 3cm. What is the measure of the base edges? What type of polygon has this prism got as sides? Are all of them equal? Cut the shape and make it up (don't forget the flaps). Can you see any plane of symmetry?*

612. Dibuja el boceto del desarrollo de un **prisma** trapezoidal rectángulo recto de aristas laterales 8cm y base siguiente: bases del trapecio 2cm y 6cm, altura 3cm. ¿Cuánto miden las aristas de la base? Ahora dibuja la figura fielmente en una hoja suelta para recortar y montarla (sin olvidarte de las pestañas). ¿Qué tipo de polígono tiene por caras este prisma? ¿Son todas iguales? ¿Observas algún plano de simetría?

*Draw accurately the net of a trapezoidal right rectangle **prism** with lateral edges of 8cm and the following base: bases of 2cm and 6cm, height of 3cm. What is the measure of the base edges? What type of polygon has this prism got as sides? Are all of them equal? Cut the shape and make it up (don't forget the flaps). Can you see any plane of symmetry?*

613. Dibuja el boceto del desarrollo de este paralelepípedo: un **prisma** romboidal recto de aristas laterales 13cm y diagonales de la base siguientes: 8cm y 8,4cm. ¿Cuánto miden las aristas de la base? Ahora dibuja la figura fielmente en una hoja suelta para recortar y montarla (sin olvidarte de las pestañas). ¿Qué tipo de polígono tiene por caras este prisma? ¿Son todas iguales? ¿Observas algún plano de simetría?

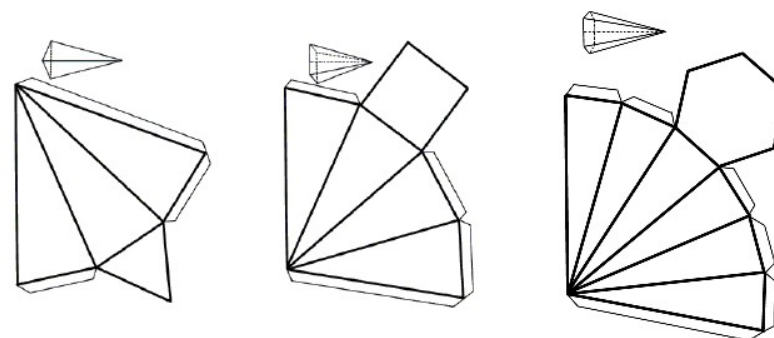
*Draw accurately the net of a right rhomboid **prism** with lateral edges of 13cm and the following base diagonals: 8cm and 8,4cm. What is the measure of the base edges? What type of polygon has this prism got as sides? Are all of them equal? Cut the shape and make it up (don't forget the flaps). Can you see any plane of symmetry?*

614. Dibuja el boceto del desarrollo de un **prisma** cuadrangular regular (ortopedro) de aristas laterales 11cm y aristas de la base 4cm. Ahora dibuja la figura fielmente en una hoja suelta para recortar y montarla (sin olvidarte de las pestañas). ¿Qué tipo de polígono tiene por caras este prisma? ¿Son todas iguales? ¿Observas algún plano de simetría?

*Draw accurately the net of a regular quadrangular **prism** with lateral edges of 11cm and the following base edges: 4cm. What type of polygon has this prism got as sides? Are all of them equal? Cut the shape and make it up (don't forget the flaps). Can you see any plane of symmetry?*

### Pirámides

#### Pyramids



615. Dibuja el boceto del desarrollo de una **pirámide** cuadrangular regular de aristas laterales 9cm y aristas de la base 3cm. Ahora dibuja la figura fielmente con regla y compás en una hoja suelta para recortar y montarla (sin olvidarte de las pestañas). ¿Qué tipo de polígono tiene por caras laterales esta pirámide? ¿Tienen todas estas caras la misma apotema (altura)? ¿Observas algún plano de simetría?

*Draw accurately the net of a regular quadrangular **pyramid** with lateral edges of 9cm and base edges of 3cm. Use your ruler and compass. What type of polygon has this pyramid got as sides? Have all these sides the*



same apothem (height)? Cut the shape and make it up (don't forget the flaps). Can you see any plane of symmetry?

616. Dibuja el boceto del desarrollo de una **pirámide** trapezoidal isósceles de aristas laterales 10cm y aristas de la base siguientes: lados iguales 2,5cm, lados desiguales 3cm y 6cm. Ahora dibuja la figura fielmente con regla y compás en una hoja suelta para recortarla y montarla (sin olvidarte de las pestañas). ¿Qué tipo de polígono tiene por caras laterales esta pirámide? ¿Tienen todas estas caras la misma apotema (altura)? ¿Observas algún plano de simetría?

*Draw accurately the net of an isosceles trapezoidal **pyramid** with lateral edges of 10cm and the following base edges: equal sides of 2.5cm, unequal sides of 3cm and 6cm. What type of polygon has this pyramid got as lateral sides? Have all the sides got the same apothem (height)? Cut the shape and make it up (don't forget the flaps). Can you see any plane of symmetry?*

617. Dibuja el boceto del desarrollo de una **pirámide** rectangular de aristas laterales 12cm y aristas de la base siguiente: 4cm y 6cm. Ahora dibuja la figura fielmente con regla y compás en una hoja suelta para recortarla y montarla (sin olvidarte de las pestañas). ¿Qué tipo de polígono tiene por caras laterales esta pirámide? ¿Tiene todas estas caras la misma apotema (altura)? ¿Observas algún plano de simetría?

*Draw accurately the net of a rectangular **pyramid** with lateral edges of 12cm and the following base edges: 4cm and 6cm. Use your ruler and compass. What type of polygon has this pyramid got as lateral sides? Have all the sides got the same apothem (height)? Cut the shape and make it up (don't forget the flaps). Can you see any plane of symmetry?*

618. Dibuja el boceto del desarrollo de una **pirámide** triangular regular de aristas laterales 11cm y aristas de la base 4cm. Ahora dibuja la figura fielmente con regla y compás en una hoja suelta para recortarla y montarla (sin olvidarte de las pestañas). ¿Qué tipo de polígono tiene por caras laterales esta pirámide? ¿Tienen todas estas caras la misma apotema (altura)? ¿Observas algún plano de simetría?

*Draw accurately the net of a triangular **pyramid** with lateral edges of 11cm and base edges of 4cm. What type of polygon has this pyramid got as lateral sides? Have all the sides got the same apothem (height)? Cut the shape and make it up (don't forget the flaps). Can you see any plane of symmetry?*

619. En una **pirámide** rectangular de aristas laterales 7,5cm, diagonales de la base 2,5cm y uno de los lados de la base 1,5cm, a) ¿cuánto miden el resto de las aristas de la base? b) dibuja el boceto de su desarrollo; c) ahora dibuja la figura fielmente con regla y compás en una hoja suelta para recortarla y montarla (sin olvidarte de las pestañas); d) ¿qué tipo de polígono tiene por caras laterales? ¿Observas algún plano de simetría?

*In a rectangular **pyramid** with lateral edges of 7.5cm, base diagonals of 2.5 and one of the base edges of 1.5cm, a) What is the measure of the others base edges? b) draw accurately its net, use your ruler and compass; c) What type of polygon has it got as lateral sides? Can you see any plane of symmetry?*

620. Dibuja el boceto del desarrollo de una **pirámide** cuadrangular regular de aristas laterales 8cm y aristas de la base 3,5cm. Ahora dibuja la figura fielmente con regla y compás en una hoja suelta para recortarla y montarla (sin olvidarte de las pestañas). ¿Qué tipo de polígono tiene por caras laterales? Calcula la apotema de las caras laterales. ¿Observas algún plano de simetría?

*Draw accurately the net of a regular quadrangular **pyramid** with lateral edges of 8cm and base edges of 3.5cm. What type of polygon has it got as lateral sides? Calculate the apothem of its lateral sides. Can you see any plane of symmetry?*

621. Investiga la existencia de la siguiente pirámide. Dibuja fielmente con regla y compás el desarrollo lateral de una **pirámide** cuadrangular de aristas laterales 12cm y aristas de la base 5cm. Dibuja ahora la base como un rombo de diagonales 8cm y 6cm. Recorta la figura y móntala (sin olvidarte de las pestañas). ¿Se forma de verdad una pirámide romboidal? Reflexiona comparando esta



figura con una **pirámide** cuadrangular regular de aristas laterales 12cm y aristas de la base 5cm.

*Investigate the existence of the following pyramid. Use your ruler and compass to draw accurately the lateral net of a quadrangular **pyramid** with lateral edges of 12cm and base edges of 5cm. Plot now its base as a rhombus of diagonals 8cm and 6cm. Cut the shape and make it up (don't forget the flaps). Is it really a rhomboid pyramid? Reflect on this comparing this figure with a regular quadrangular **pyramid** with lateral edges of 12cm and base edges of 5cm.*

#### RECUERDA

**FÓRMULA DE EULER:**  $C + V = 2 + A$

(caras más vértices igual a dos más aristas)

**La fórmula de Euler siempre se cumple para poliedros convexos (no se garantiza nada para poliedros cóncavos).**

Regla mnemotécnica => puede ser te útil aprendértela con **CerVeZA**.

#### REMEMBER

**EULER FORMULA:**  $F + V = 2 + E$

(faces plus vertices equals two plus edges)

**Euler formula always occurs in convex polyhedrons.**



622. **Resuelto en youtube.** Dibuja en grande el poliedro de esta

letra **L** e investiga si se cumple la fórmula de Euler. ¿Qué puedes decir del resultado? ¿De qué tipo es este poliedro en las tres clasificaciones estudiadas en clase?

*Draw the polyhedron of the letter above in big size and find out if Euler formula occurs in it. What can you say about the result? What type of polyhedron is this according to the three classifications studied in class?*

623. **Resuelto en youtube.** Dibuja en grande el poliedro de esta

letra **A** e investiga si se cumple la fórmula de Euler. ¿Qué puedes decir del resultado? ¿De qué tipo es este poliedro en las tres clasificaciones estudiadas en clase?

*Draw the polyhedron of the letter above in big size and find out if Euler formula occurs in it. What can you say about the result? What type of polyhedron is this according to the three classifications studied in class?*

624. Dibuja en grande el poliedro de esta letra **P** e investiga si se cumple la fórmula de Euler. ¿Qué puedes decir del resultado? ¿De qué tipo es este poliedro en las tres clasificaciones estudiadas en clase?

*Draw the polyhedron of the letter above in big size and find out if Euler formula occurs in it. What can you say about the result? What type of polyhedron is this according to the three classifications studied in class?*

625. Dibuja en grande el poliedro de esta letra **Z** e investiga si se cumple la fórmula de Euler. ¿Qué puedes decir del resultado? ¿De qué tipo es este poliedro en las tres clasificaciones estudiadas en clase?

*Draw the polyhedron of the letter above in big size and find out if Euler formula occurs in it. What can you say about the result? What type of polyhedron is this according to the three classifications studied in class?*

626. Dibuja en grande el poliedro de esta letra **Y** e investiga si se cumple la fórmula de Euler. ¿Qué puedes decir del resultado? ¿De qué tipo es este poliedro en las tres clasificaciones estudiadas en clase?

*Draw the polyhedron of the letter above in big size and find out if Euler formula occurs in it. What can you say about the result? What type of polyhedron is this according to the three classifications studied in class?*





627. Dibuja en grande el poliedro de esta letra **H** e investiga si se cumple la fórmula de Euler. ¿Qué puedes decir del resultado? ¿De qué tipo es este poliedro en las tres clasificaciones estudiadas en clase?

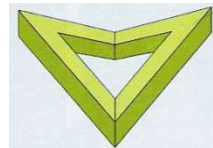
*Draw the polyhedron of the letter above in big size and find out if Euler formula occurs in it. What can you say about the result? What type of polyhedron is this according to the three classifications studied in class?*

628. Dibuja en grande el poliedro de esta letra **T** e investiga si se cumple la fórmula de Euler. ¿Qué puedes decir del resultado? ¿De qué tipo es este poliedro en las tres clasificaciones estudiadas en clase?

*Draw the polyhedron of the letter above in big size and find out if Euler formula occurs in it. What can you say about the result? What type of polyhedron is this according to the three classifications studied in class?*

629. ¿Cumple la relación de Euler el siguiente poliedro? Justifica tu respuesta.

*Does Euler relation occurs in the following polyhedron? Justify your answer.*



ÁREA Y VOLUMEN  
AREA AND VOLUME

POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS			
FIGURA 3D		ÁREA	VOLUMEN
PRISMAS	PRISMAS	$A_{Total} = A_{Lateral} + 2 \cdot A_{Base}$	$V = A_{Base} \cdot Altura_{prisma}$
	CUBOS	$A_{Total} = 6 \cdot A_{Base} = 6 \cdot lado^2 = 6 \cdot l^2$	$V = lado^3 = l^3$
	ORTOEDROS	$A_{Total} = A_{Lateral} + 2 \cdot A_{Base}$	$V = lado \cdot lado \cdot lado = a \cdot b \cdot c$
PIRÁMIDES		$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base}$	$V = \frac{A_{Base} \cdot Altura_{pirámide}}{3}$
CILINDROS		$A_{Total} = A_{Lateral} + 2 \cdot A_{Base} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r)$	$V = A_{Base} \cdot Altura_{cilindro} = \pi r^2 h$
CONOS		$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r \cdot (g + r)$	$V = \frac{A_{Base} \cdot Altura_{cono}}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Qué ocupa más un metro cúbico de grava o un metro cúbico de arena? ¿Qué matemáticas hay detrás del jabón?

Parte I y II



Prismas  
Prisms

RECUERDA DEL PRISMA  
ABOUT THE PRISM, REMEMBER

ÁREA/AREA:  $A_{Total} = A_{Lateral} + 2 \cdot A_{Base}$

VOLUMEN/VOLUME:  $V = A_{Base} \cdot h_{prisma/prism}$

Si el prisma es RECTO, la altura coincide con las aristas laterales.

*If the prism is a right prism, its height is the same as its lateral edges.*



630. Proyecto de investigación. Construcción de estanterías en un cobertizo. Descárgate el documento en la sección de ejercicios de la página web de estenmáticas.

631. Halla el área y el volumen de un **prisma** cuadrangular regular recto de arista lateral 40cm y arista de las bases 12cm. *Find out the area and volume of a regular quadrangular prism with lateral edge of 40cm and bases edge of 12cm has.*

632. Halla el volumen de granito (en metros cúbicos) que hay en una columna con forma de **prisma** hexagonal regular recto de arista lateral 300cm y arista de las bases 50cm. ¿Cuánto mide la apotema de las bases?

*Find out the volume of granite (in cubic meters) that a column with shape of a regular hexagonal prism with lateral edge of 300cm and bases edge of 50cm has. What is the measure of the bases apothem?*

633. Halla la superficie de fachada y el volumen de una torre de vigilancia con forma de **prisma** romboidal recto (paralelepípedo) de altura 15m y diagonales de la base igual a 8m y 6m. ¿Cuánto miden todas sus aristas?

*Find out the area of a facade and the volume of a guard tower with shape of a right rhomboid prism (parallelepiped) whose height is 15m and base diagonals equal to 8m and 6m. What is the measure of its edges?*

634. En un **prisma** recto de base un triángulo rectángulo isósceles, un cateto mide 10cm y las aristas de las caras 45cm. Ayudándote del desarrollo, calcula su área total y su volumen.

*In a right prism whose base is an isosceles right triangle, one cathetus is 10cm and its lateral sides are 45cm. Helping you with its net, calculate its total area and its volume.*

635. Un jarrón de cristal tiene un diseño de **prisma** hexagonal regular recto con arista de la base 7,5cm y altura de las caras 52cm. Ayudándote del desarrollo, calcula el área de cristal y el volumen del jarrón.

*A vase has a shape of regular right hexagonal prism with base edge of 7.5cm and sides height of 52cm. Helping you with its net, calculate the vase total area and volume.*

636. Halla la superficie de cartón que tiene un molde de viga con forma de **prisma** triangular regular recto de altura 25dm y arista de las bases 5dm. Nota1: el molde tiene dos tapas (las dos bases del prisma). Nota2: no hagas el área de las bases con la fórmula de Herón, sino usando la fórmula de la altura (necesitarás Pitágoras).

*Find out the cardboard area that a beam mould with shape of a regular right triangular prism of height 25dm and bases edge of 5dm has. Note1: the mould has two covers (these are the two bases of the prism). Note2: find out the area of the bases by using the height's formula instead of Heron's formula.*

637. Halla el volumen de un recinto cúbico (**hexaedro**) totalmente transparente sabiendo que está hecho con 2.000m<sup>2</sup> de cristal. Nota: ten en cuenta que el complejo apoya sobre el suelo (sin cristal).

*Find out the volume of a cubic enclosure (regular hexahedron) which is completely transparent taking into account that it has been done with 2000m<sup>2</sup> of glass. Note: bear in mind that the building stands on the floor (without glass).*

638. Una caja de galletas decorada tiene un diseño de **prisma** triangular recto de altura 45cm y aristas de la base 8cm, 15cm y 17cm. Ayudándote del desarrollo, calcula el área total y el volumen de la caja. Nota: ¿de qué tipo es el triángulo de la base?

*Translate.*



639. Halla el volumen de una nave industrial **ortoédrica** de fachada principal con un ancho de 20m y un alto de 7m (el fondo de la nave es desconocido), sabiendo que está construida con 4.020m<sup>2</sup> de aluminio. Nota: ten en cuenta que la nave apoya sobre el suelo (sin aluminio).

*Find out the volume of a **rectangular cuboid** industrial unit whose main facade is 20m wide and 7m high (unknown depth), taking into account that it has been built with 4020m<sup>2</sup> of aluminium. Note: take into account that this industrial unit stands on the floor (without aluminium)*

640. Halla el área y el volumen del minarete (alminar) de una mezquita sabiendo que tiene forma de **prisma** cuadrangular regular recto de diagonal 40m y aristas de las bases 16m. ¿Cuánto mide la diagonal de las bases? ¿Cuánto miden las aristas laterales?

Translate.

**Pirámides**  
**Pyramids**

**RECUERDA**  
**ABOUT THE PYRAMID, REMEMBER**

<b>ÁREA/AREA:</b>	$A_{\text{Total}} = A_{\text{Lateral}} + A_{\text{Base}}$
<b>VOLUMEN/VOLUME:</b>	$V = \frac{A_{\text{Base}} \cdot h_{\text{pirámide/pyramid}}}{3}$



641. ¿Cuál será el área y el volumen de una **pirámide** cuadrangular de arista de la base 15cm y apotema lateral 42cm? Nota: la pirámide es regular.

*What will be the lateral area of a quadrangular **pyramid** with base edge of 15cm and lateral apothem of 42cm? NOTE: the pyramid is regular.*

642. Averigua la superficie de lona y el volumen de aire de una carpa de circo con forma de **pirámide** pentagonal regular de aristas laterales 130m, lado de la base 60m y radio de su circunferencia circunscrita 50m. ¿Cómo vas a hacerlo?

*Find out the volume of a circus top with shape of a regular pentagonal **pyramid** with base side of 60m, lateral edges of 130m and radius of the circumscribed circumference of 50m. How will you do that?*

643. ¿Cuál será el área lateral de una **pirámide** cuadrangular regular de arista de la base 10cm y arista lateral 22cm?

*What will be the lateral area of a regular quadrangular pyramid with base edge of 10cm and lateral edge of 22cm?*

644. Averigua el volumen de una **pirámide** cuadrangular regular con todas sus aristas (laterales y de la base) iguales a 6cm.

*Find out the volume of a regular quadrangular **pyramid** with all their edges (laterals and base) equal to 6cm.*

645. ¿Cuál será el área de una **pirámide** triangular regular de arista de la base 5cm y arista lateral 15cm?

*Find out the area of a regular triangular **pyramid** with base edge of 5cm and lateral edge of 15cm.*

646. Calcula la superficie de cristal tiffany que tiene una lámpara con pantalla tiffany en forma de **pirámide** octogonal regular de aristas laterales 20cm y aristas de la base 16cm. nota: date cuenta de que las pantallas de las lámparas obviamente no tienen base (es por donde se coloca la bombilla).

*Calculate the area of tiffany glass that a tiffany lampshade with the shape of a regular octogonal **pyramid** whose lateral edges are 20cm and base edges are 16cm. NOTE: bear in mind that lampshades do not have a base (where the light bulb is placed).*

647. Averigua la superficie del recubrimiento de oro que se usó en la construcción de una **pirámide** egipcia con todas las aristas



laterales de 150m y que tiene por base un rectángulo de lados 100mx50m. ¿Qué tipo de polígono son las caras laterales?

*Find out the area of gold covering that was used in the construction of an egyptian **pyramid** whose all lateral edges are 150m and whose base is a rectangle with sides 100mx50m. What type of polygon are the lateral sides?*

648. Calcula el volumen de una gran **pirámide** cuadrangular con perímetro de la base 600m y altura 55m. Si se construyera de granito y se recubriera de planchas de oro, ¿cuánta superficie de oro habría que suministrar? Nota1: la base no se recubre, pues apoya en el suelo. Nota2: la pirámide es regular.

*Calculate the volume of a big quadrangular **pyramid** whose base perimeter is 600m and height is 55m. If it was built with granite and covered with gold sheets, how much gold area should be provided?*

*NOTE1: the base is not covered because it stands on the floor. NOTE2: this pyramid is regular.*

649. Este verano hemos pasado las vacaciones en un camping junto a la playa. A tal efecto, hemos alquilado una tienda de campaña con forma de pirámide hexagonal regular de arista lateral 3m y arista de la base 2,4m. ¿Puede estar de pie en el interior de la tienda nuestro amigo Ernesto si mide 1,85m? Averigua el volumen de aire que cabe dentro y la lona que se ha gastado en su confección.

*This summer, we spent our holidays in a campsite near the beach. Because of this, we rented a tent with shape of a regular hexagonal **pyramid** whose lateral edge is 3m and base edge is 2.4m. Our friend Ernest is 1.85m height. Can Ernest stand inside the tent? Find out the volume of air that can fit inside the tent and the amount of canvas used for its production.*

**Conos/cilindros**  
**Cones/cylinders**

**RECUERDA del CILINDRO**  
**ABOUT THE CYLINDER, REMEMBER**

**ÁREA/AREA:**  $A_{Total} = A_{Lateral} + 2 \cdot A_{Base} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r)$   
**VOLUMEN/VOLUME:**  $V = A_{Base} \cdot h = \pi r^2 h$



**RECUERDA del CONO**  
**ABOUT THE CONE, REMEMBER**

**ÁREA/AREA:**  $A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r \cdot (g + r)$

**VOLUMEN/VOLUME:**  $V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$



650. En un silo **cilíndrico** de diámetro 5m y altura 15m, ¿cuánto grano se puede almacenar?  
*In a cylindrical storage building whose diameter is 5m and height is 15m, how much grain can be stored?*

651. Un hombre se encuentra, enterrado en su parcela, un depósito (tanque de hierro) **cilíndrico** del ejército de la época de la guerra civil. Sabe que el largo es 3m y que el diámetro de la base vale 2,40m. Si el tanque está en buen estado, estaría interesado en rellenarlo de combustible, por lo que quiere conocer su capacidad. Si el tanque está en mal estado, lo vendería como chatarra, por lo que



necesita estimar el peso a través de su área. Ayúdalo en sus cálculos. Nota: supón que cada  $m^2$  de hierro de este tipo de tanques pesa 55kg. ¿Cuántos euros ganaría vendiendo el hierro si cada kilo se paga a 15 céntimos?

*A man finds a **cylindrical** tank, from the civil war period, buried in his piece of ground. He knows that its length is 3m and its base diameter is 2.40m. If the tank is in good condition, the man would like to fill in it with fuel (that is why he wants to know its capacity). If the tank is in bad condition, the man would sell it as scrap metal, so he needs to estimate the weight through its surface area. Help him with his calculations. Note: suppose that every  $m^2$  of iron in these types of tanks weighs 55kg. If it is known that every kg of scrap metal costs 15 cents, how much euros would he earn as a scrap metal?*

652. Calcula el volumen de nata que cabe en una manga pastelera (forma de **cono**) de generatriz 30cm y radio de la circunferencia 12cm. ¿A cuántos litros de nata equivale eso? ¿Y si la manga pastelera fuese un tubo con la misma altura y base?

*Calculate the volumen of cream that a pastry bag can hold (**cone** shape) with generatrix 30cm and radius of circumference 12cm. How many liters of cream is it equivalent to? What if the pastry bag was a tube with the same height and base?*

653. ¿Cuánta arena cabe en un reloj de arena con forma de doble **cono** si cada cono tiene una generatriz de 9cm y el diámetro de las bases es 3cm?

*How much sand can a double **cone**-shaped hourglass hold if each generatrix is 9cm and its bases diameter is 3cm?*

654. Un gorro de **cucurucho** tiene de circunferencia básica 67,4cm y de altura 32cm. ¿Qué cantidad de tela se necesita para forrarlo?

*A pointed **cone** hat has a basic circumference of 67.4 cm and a height of 32cm. How much cloth do you need to cover it?*

655. Si una empresa fabrica **tubos** de 2,5m de largo, ¿cuántos se necesitan comprar para hacer una conducción de 200km? Si tiene

una sección de 50cm, ¿qué  $m^3$  de volumen alcanza el entramado de tubos en todo el recorrido? Nota: por sección se entiende el diámetro.

*If a company makes tubes of 2.5m long, how many of them do you need to make a piping of 200km? If this has a section of 50cm, what  $m^3$  of volume does the framework of tubes reach in the whole intinerary? NOTE: "section" refers to the diameter.*

656. Calcula la altura de un **cono** de diámetro de la base 68cm y generatriz 67cm. ¿Qué superficie y volumen tiene? *Calculate the height of a **cone** whose base diameter is 68cm and its generatrix is 67cm. What area and volume has it got?*

657. La longitud de una circunferencia es de 45,6dm. Calcula la superficie de un **cilindro** de 130cm de altura que tiene a esta circunferencia como base.

*A circumference length is 45,6dm. Calculate the surface area of a **cylinder** with height 130cm and the previously mentioned circumference as base.*

658. Un rodillo (**cilindro**) de obra mide de diámetro 1,5m y tiene una anchura de 3,5m. ¿Cuántas vueltas tendrá que dar para apisonar 4km de camino?

*A road roller (**cylinder**) measures 1.5m of diameter and it is 3.5m wide. How many spins will it take to roll flat 4km of path?*

659. Una fábrica de artículos de cocina recibe un pedido de 100 mangas pasteleras (forma de **cono**). Calcula la superficie de tela que necesita la fábrica para este pedido sabiendo que el cliente quiere que cada manga tenga una capacidad de  $4.200cm^3$  y diámetro de la circunferencia base 20cm.

*A factory of kitchen-ware receives an order of 100 pastry bags (**cone** shape). Calculate the surface of cloth that the factory needs taking into account that the customer wants each bag with a capacity of  $4200cm^3$  and with 20cm of diameter in the base circumference.*

660. Mi hermana hace un pastel borracho de almíbar con la ayuda de la Thermomix de la siguiente manera: un base redonda de bizcocho borracho de 2,5dm de diámetro y 1,5cm de espesor + capa de crema pastelera (10mm espesor) + capa de bizcocho (1cm





espesor) + capa de chocolate (2mm espesor) + capa de rodajitas de fresas (3mm espesor) + capa de bizcocho (1,5cm espesor) + fondant (2mm espesor todo alrededor). Una vez montado, ¿qué figura le sale? ¿Qué volumen tiene? ¿Qué superficie de fondant necesita el pastel?

661. La moneda de dos euros tiene un diámetro de 25,75mm, un espesor de 2,20mm y un peso de 8,50g. La moneda de un euro tiene un diámetro de 23,25mm, un espesor de 2,33mm y un peso de 7,50g. Si hago dos torres con veinte monedas de cada tipo, a) ¿qué diferencia de volumen habrá entre ellas? b) ¿Y de altura? c) ¿Y de peso?

*The 2 euros coin has a diameter of 25.75mm, a thickness of 2.20mm and a weight of 8.50g. The 1 euro coin has a diameter of 23.25mm, a thickness of 2.33mm and a weight of 7.50g. If I build two towers with twenty coins of each type, a) what is the difference in volume between the two of them? b) What is the difference in height? c) What is the difference in weight?*

### PROBLEMAS

(con cambios de escala en las unidades, precios...)

### PROBLEMS

(with scale changes in units, prices....)

662. Un apasionado del reciclaje desmonta las **latas** de refresco para usarlas en sus obras artísticas. Si le acaban de llevar 10 latas a su taller, ¿qué superficie tendrá una vez las procese? Ayúdale sabiendo que las latas contienen 33cl de líquido y tienen una altura de 11cm cada una. Nota: calcula el radio por tanteo.

*A passionate about recycling dismantles soft drink cans in order to use them in his art works. If he has just been given 10 cans, what area will he have once he has processed them? Help him taking into account that the cans contain 33cl of liquid and that the height in each can is 11cm.*

663. ¿Cuántos litros de horchata caben en una **pirámide** cuadrangular con 6cm de lado de la base y 5cm de apotema de las caras? ¿Cuánto costará el contenido de horchata si las terrazas de verano cobran 2€ el vaso de 250ml? Nota: la pirámide es regular.

*How many litres of tiger nut milk drink can a quadrangular pyramid hold whose base side is 6cm and apothem faces is 5cm? How much will the content of the drink cost if summer terraces charge 2 euros per glass of 250ml? NOTE: the pyramid is regular.*

664. Una copa en forma **cónica** tiene una boca de 45,6cm (longitud de la circunferencia). Si la generatriz de la copa es de 11,4cm, ¿cuál será la capacidad en dl?

*A cone-shaped glass has a mouth of 45.6cm (circumference length). If the glass generatrix is 11.4cm, which is its capacity in dl?*

665. **Sándwich El Paso. Primera parte.** En la carta de El Paso de Talavera hacen un súper-sándwich de la manera siguiente: una rebanada de pan de molde cuadrada de 10cm de lado con espesor de 1,5cm + loncha cuadrada de pavo (2mm espesor) + rebanada de pan + capa de lechuga picadita con mayonesa (7mm espesor) + trozos de beicon (1cm espesor) + rebanada de pan + cama de cebolla picada (4mm espesor) + capa de pollo cocido (1,2cm espesor) + rebanada de pan. Una vez montado, ¿qué figura les sale? ¿Qué volumen tiene?

666. **Sándwich El Paso. Segunda parte.** Pero el cocinero, en lugar de servirlo así, lo corta por las diagonales de la base en cuatro trozos iguales y los coloca seguidos en una bandeja alargada. ¿Qué figura tiene ahora? ¿Cuánto volumen tiene el sándwich final? ¿Cabrán en un plato-cajita rectangular de 20cmx10cm? Si El Paso cobra los 100 gramos de sándwich a 5€ y se sabe que el dm<sup>3</sup> de este tipo de sándwich pesa 80gramos, ¿cuánto cobrará el restaurante por este plato de la carta?

667. ¿Cuántos litros puede contener un depósito **cilíndrico** de circunferencia 3,4m y altura 3,5m? ¿Cuánto costará llenarlo de gasoil si el precio del combustible es de 1,24€/l?

*How many litres can a cylindrical tank with circumference of 3.4m and height of 3.5m hold? How much will it cost to fill it with fuel if the fuel is 1.24€/l?*

668. Una heladería tiene la siguiente oferta: “compra un **cono** por 5€ y rellénalo de helado cuantas veces quieras”. Si un cliente goloso



se rellena el cono tres veces con un helado de 8€/l, ¿cuánto dinero ha ganado la heladería con él? Nota: el cono de galleta tiene una generatriz de 10cm y una boca de 6cm de radio.

*An ice-cream shop has the following sale: "buy an ice-cream **cone** for 5€ and fill it with ice-cream as many times as you like". If a sweet-tooth customer fills the cone three times with ice-cream of 8€/l, how much money has the ice-cream shop earn with this customer? NOTE: the biscuit cone has a generatrix of 10cm and a mouth with radius 6cm.*

669. Águeda compra en la tienda de Miguel una plancha de goma EVA con forma rectangular de medidas 1,5mx75cm que ha pagado a razón de 6€ el m<sup>2</sup>. En la tienda de Pablo compra un recambio de silicona por 3,5€. Finalmente, en la tienda de Julia compra un botecito de brillantina por 2€. Águeda ahora quiere hacer con eso cajitas ortoédricas de medidas 15cmx7cmx4cm para regalar a sus compis Irene, Sandra, Marta, Alejandro, Ainhoa, Javier... En principio... ¿cuántas cajitas podrá construir con la goma EVA que tiene? ¿Cuánta goma le sobrará/faltará? ¿A qué precio le saldrá cada cajita? ¿Cuánto confeti se podría meter en cada cajita?

670. Un tanque industrial de combustible con doble casco y forma de **cilindro** se quiere rellenar con gasoil agrícola para abastecer a una cooperativa del sector de la aceituna. Las medidas externas del tanque son las siguientes: generatriz 15m y diámetro de la base 10m. Si se sabe que la cámara entre cascos es de 20cm, a) ¿qué capacidad tiene en realidad el tanque? b) ¿Qué volumen se pierde entre los dos cascos? c) ¿Qué porcentaje del total supone eso?

*An industrial tank of fuel with double cases and **cylinder**-shaped has to be filled with farming fuel to provide a cooperative from the olive sector. The external measures of the tank are the following: generatrix 15m and base diameter 10m. If we know that the cavity between the cases has 20cm, a) what capacity has the tank really got? b) What volume is lost with both cases? c) What percentage of the total is that?*

671. En un recinto **cúbico** (forma de hexaedro) de 9m de arista se construye un **cono** de 6,7m de circunferencia y 8,2m de generatriz. Si

se destina a una gran pecera el espacio intermedio entre ambas figuras, ¿cuántos litros de agua contendrá la pecera?

*In a **cube**-shaped enclosure with 9m edge (hexahedron shape) a **cone** with 6.7m of circumference and 8.2m of generatrix is built. If the intermediate space left between both figures is intended for a big fish tank, how many litres of water will the fish tank have?*

672. Un tanque doméstico de combustible con forma de **ortopedro** se tiene apoyado contra la pared del garaje y se quiere rellenar con gasoil de calefacción para pasar el invierno. Si las bases del poliedro miden 1,2mx1,5m y la estructura tiene un ancho de 60cm, ¿Cuántos m<sup>3</sup> de gasoil podría llegar a contener? ¿Cuánto costará llenarlo a razón de 1,53€/l?

*A domestic tank of fuel with a **rectangular cuboid** shape has to be filled for winter. If the polyhedron bases measure 1.2m x 1.5m and the structure is 60cm thick. How many m<sup>3</sup> of fuel could it contain? How much will it cost to fill it at the rate of 1.53€/l?*

673. Una empresa de ambientadores fabrica unos **conos** de incienso aromatizado de generatriz 2cm y diámetro de la base 10mm. a) Calcula el volumen en mm<sup>3</sup> de incienso que necesita cada cono; b) calcula la superficie en mm<sup>2</sup> de papel que se gasta en envolverlo; c) ¿qué beneficio obtendrá la empresa por la venta de 1000 de estos conos si cada cinco conos le reportan unas ganancias de 0,5 céntimos?

*An air fresheners factory makes **cones** of incense with generatrix 2cm and base diameter 10mm. a) Calculate the volume in mm<sup>3</sup> of incense that each cone needs; b) calculate the area in mm<sup>2</sup> of wrapping paper that will be spent; c) What profits will the factory make if it sells 1000 cones taking into account that they earn 0.5 cents per five sold cones?*

674. Un camión hormigonera con forma de **cilindro** tumbado y coronado en un **cono**, es llamada para prestar un servicio a media carga de hormigón. Si el largo del depósito (entero => cilindro más cono) es 7m, su circunferencia tiene un diámetro de 2m y la generatriz del cono es 1,25m. a) ¿Qué capacidad total tiene la



hormigonera? b) Si cada  $m^3$  servido reporta 48€ de beneficio, ¿qué beneficios recoge hoy?

*A cement mixer lorry in the shape of an inclined **cylinder** topped with a **cone** is needed to provide a service of half the load of cement. If the length of the tank is 7m, its circumference has a diameter of 2m and the cone generatrix is 1.25m, a) What total capacity has the cement mixer got? b) if each served  $m^3$  gives a profit of 48€, what profit will it make today?*

675. Un pastor francés se encuentra en los Alpes un depósito de hierro que aparentemente fue abandonado por el ejército americano durante la 2ª guerra mundial. Si tiene forma de **ortopedro** de base  $2m \times 1,5m$  y altura 3m, a) ¿qué capacidad tiene el depósito? b) ¿Qué superficie de hierro? Si el metro cuadrado de este hierro pesa 60kg y se sabe que cada kilo cuesta 18 céntimos, c) ¿qué dinero obtendrá el pastor por su venta?

*Translate.*

## RECUERDA DE 1º ESO

POLÍGONOS		
POLÍGONO	CARACTERÍSTICAS	ÁREA o SUPERFICIE
TRIÁNGULOS	El triángulo es el polígono de tres lados. Existen dos clasificaciones. Según sus lados: equilátero (tres lados iguales), isósceles (dos lados iguales y uno desigual) y escaleno (tres lados distintos). Según sus ángulos: acutángulo (los tres ángulos agudos), rectángulo (un ángulo recto) y obtusángulo (un ángulo obtuso). El equilátero es el triángulo regular (lados iguales y ángulos de 60°).	FÓRMULA DE LA ALTURA $\Rightarrow \text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = s = \frac{b \cdot h}{2}$ FÓRMULA DE HERÓN $\Rightarrow \text{Área} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ siendo $s$ el semiperímetro $\equiv s = \frac{\text{Perímetro}}{2} = \frac{a+b+c}{2}$
CUADRILÁTEROS PARALELOGRAMOS	CUADRADOS	$\text{Área} = \text{Lado}^2 = l^2$
	ROMBOS	$\text{Área} = \frac{\text{Diagonal}_{\text{Mayor}} \cdot \text{Diagonal}_{\text{Menor}}}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$
	RECTÁNGULOS	$\text{Área} = \text{Lado}_{\text{grande}} \cdot \text{Lado}_{\text{pequeño}} = a \cdot b$
	ROMBOIDES	$\text{Área} = \text{Base} \cdot \text{Altura} = b \cdot h$
	TRAPECIOS	$\text{Área} = \frac{(\text{Base}_{\text{Mayor}} + \text{Base}_{\text{Menor}}) \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$
POLÍGONOS REGULARES (n lados)	Un polígono es regular cuando todos sus lados y todos sus ángulos son iguales. Los polígonos regulares tienen un punto (centro del polígono) desde donde se trazan sus apotemas (rectas en perpendicular a los lados).	$\text{Área} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$
POLÍGONOS NO REGULARES	POR TRIANGULACIÓN $\Rightarrow$ se descompone la figura de n lados en n-1 triángulos y se calculan las áreas parciales con HERÓN.	

## PROBLEMAS COTIDIANOS DE POLIEDROS + CUERPOS REDONDOS RECUERDA



POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS			
FIGURA 3D	ÁREA	VOLUMEN	
PRISMAS	PRISMAS	$A_{Total} = A_{Lateral} + 2 \cdot A_{Base}$	
	CUBOS	$A_{Total} = 6 \cdot A_{Base} = 6 \cdot lado^2 = 6 \cdot l^2$	
	ORTOEDROS	$A_{Total} = A_{Lateral} + 2 \cdot A_{Base}$	
PIRÁMIDES		$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base}$	
CILINDROS		$A_{Total} = A_{Lateral} + 2 \cdot A_{Base} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r)$	
CONOS		$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r \cdot (g + r)$	
ESFERAS		$A = 4\pi R^2$	
TRONCOS PIRÁMIDE REGULAR		$A = \frac{Perimetro_{base} + Perimetro_{base'}}{2} \cdot Altura_{caras} + A_{base} + A_{base'}$	
TRONCOS CONO RECTOS		$A_{Total} = \pi \cdot [g \cdot (R + r) + R^2 + r^2]$	
CASQUETES POLARES		$A = 2 \cdot \pi \cdot Radio_{esfera} \cdot Altura_{casquete} = 2\pi R h$	
ZONAS ESFÉRICAS		$A = 2 \cdot \pi \cdot Radio_{esfera} \cdot Altura_{zona} = 2\pi R h$	

No necesitas aprender de memoria las fórmulas siguientes porque te serán facilitadas en el examen:

Tronco de pirámide regular, tronco de cono, casquete polar y zona esférica.



676. Calcular el área y volumen de una **esfera** de 5cm de radio.

677. Halla el volumen de un **cilindro** de altura 7cm coronado en una media **esfera** de radio 3,5cm. Dibuja la figura.

678. ¿Cuánto helado de turrón contiene un **cucurucho** de diámetro 5cm y altura 10cm si está completamente lleno y se ve un **casquete** de bola sobresaliendo cuatro centímetros? Dibuja la figura. Nota: la cantidad de helado se dará en litros.

679. Calcula, por descomposición o deduciendo primero las fórmulas, el área y el volumen de un octaedro de arista 5cm. Nota: recuerda que el **octaedro** es uno de los cinco poliedros regulares existentes, está compuesto de ocho triángulos equiláteros formando dos pirámides cuadrangulares rectas (por tanto pirámides regulares de base cuadrada) con todas las aristas iguales.

680. **Resuelto en youtube.** En un catering están interesados en saber cuánta crema de calabacín deben cocinar para rellenar un pedido de 100 tulipas de hojaldre en forma de **tronco de pirámide** hexagonal (bases regulares) de altura 6cm y de lados de las bases 5cm y 3cm respectivamente. ¿Qué superficie hay que cubrir con queso para gratinar? Dibuja la figura. Nota: las tulipas se apoyan por su base menor. Dar la cantidad de crema de calabacín en litros.

681. Dadas dos **esferas** concéntricas, ¿cuál es el volumen de la esfera exterior si el diámetro de la interior es de 7m y el espacio entre las esferas es de 0,5m?

682. ¿Qué superficie de chocolate necesitamos para cubrir una figura en forma de **tronco de cono** con radios de las bases 3cm y 5cm y altura 8cm? Dibuja la figura.

683. ¿Qué volumen de pipas podría contener un **tronco de cono** hecho con papel si tiene una generatriz de 10cm y los radios de las bases son 1cm y 7cm respectivamente? Dibuja la figura.

684. Tenemos una pecera **esférica** de doble casco, de forma que entre las dos paredes hay un espacio de 0,75m. El radio del casco exterior es de 12m. ¿Cuál es el volumen del casco interior en dm<sup>3</sup>?

685. Un molde de masa quebrada tiene forma de **tronco de pirámide** cuadrangular (bases cuadradas) de altura 7cm y de lados de las bases 3cm y 5,5cm respectivamente. ¿Qué superficie de masa tiene el molde? ¿Qué cantidad de natillas puede albergar (en litros)?





Dibuja la figura. Nota: los moldes se apoyan por su base menor y, obviamente, no hay masa quebrada en la boca de la tulipa (no puedes contar con ella en el cálculo de la superficie).

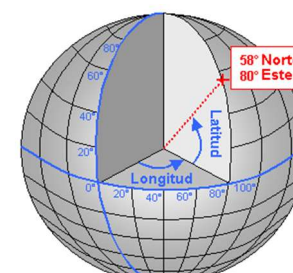
686. **Resuelto en youtube.** Una fábrica hace vasos de tubo cilíndricos de 16cm de alto con 5cm de diámetro en la boca. Estos vasos no son apilables y un cliente le ha pedido diseñar uno de la misma altura pero **apilable**. La condición del cliente es que apoye sobre 9,45cm de circunferencia y tenga una boca de 6,6cm de diámetro. Calcula la diferencia de volúmenes entre el vaso antiguo y el vaso nuevo. ¿Cuánto cristal se necesita para fabricarlo?
687. Una piedra de moler tiene forma de **tronco de cono**. Los radios de las bases son de medio metro y 35cm respectivamente. Como es macizo, solo acertamos a medir la generatriz del tronco (de 1m). ¿Qué volumen tiene la pieza? Dibuja la figura.
688. Tenemos un **cono** de plástico de altura 20cm y radio de la base 4cm. Si corto el cono por el plano que reduzca el radio de la base a 2cm, ¿de qué altura se queda el cono más pequeño? ¿De qué altura, por tanto, se queda el **tronco de cono** resultante? ¿Qué diferencia de volúmenes hay entre el cono grande, el cono pequeño y el tronco de cono?
689. A una sandía de 50cm de diámetro se le corta un **casquete** de  $1.479,69\text{cm}^2$ . ¿Qué altura tenía el casquete? ¿Qué radio? ¿Qué superficie y volumen ha quedado de sandía después del corte?
690. Se tiene una maceta decorativa con forma de **tronco de pirámide** cuadrangular regular. Sabiendo que la boca de la maceta tiene un ancho de 60cm, la altura del tronco tienen 24cm y la altura de las caras trapezoidales es 30cm, ¿cuánta tierra puede contener la maceta? ¿Cuántas de estas macetas podré rellenar si compro un saco de siete litros de tierra vegetal?
691. En Estocolmo (Suecia) hay un gran edificio **esférico** de  $605.000\text{ m}^3$  de volumen, ¿Podrías dar el radio? Investiga en internet cuándo y para qué se construyó. ¿Qué aforo tiene?

### Usando propiedades de los puntos notables del triángulo

692. Halla el área lateral de una **pirámide** triangular regular de aristas de la base 5cm y altura 11cm.
693. Halla la superficie y el volumen de una **pirámide** triangular regular de aristas de la base 6cm y aristas laterales 14cm.
694. ¿Cuál es la altura del **tetraedro** de arista 7cm? Calcula, por descomposición o deduciendo primero las fórmulas, su superficie y su volumen. Nota: recuerda que el tetraedro es uno de los cinco poliedros regulares existentes=> una pirámide triangular regular con todas las aristas iguales.

### COORDENADAS GEOGRÁFICAS

**INTRODUCCIÓN.** Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es) entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Cuál es la mejor orientación para comprarse una casa iluminada? ¿Es en todo los países la misma?



En cursos anteriores de matemáticas has aprendido a localizar un punto del plano por sus coordenadas cartesianas  $Q(x, y)$ . Ahora has de acostumbrarte a emplear las coordenadas geográficas que definen un punto  $P(\text{latitud}, \text{longitud})$ . La latitud va de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  Norte o de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  Sur; la longitud va de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  Este o de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  Oeste.





**Regla mnemotécnica: MeLon => MeridianoLongitud**

695. En el siguiente mapa, relaciona cada ciudad con sus coordenadas geográficas correspondientes.

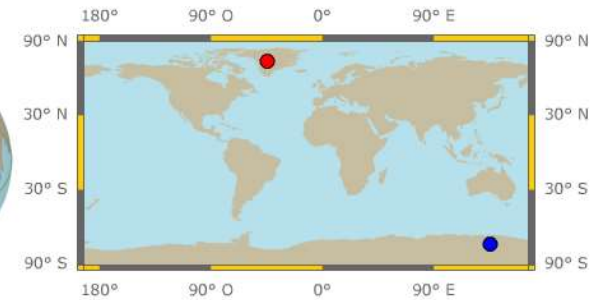


56° N 37° E	54° S 68° O	52° N 0° O	28° N 77° E
2° S 29° E	34° S 152° E	40° N 74° O	48° N 3° E
15° N 17° O	30° N 31° E	50° N 97° O	41° N 4° O
67° N 162° O	0° N 79° O	19° N 99° O	18° S 47° E
17° S 149° E	16° S 48° O	39° N 116° E	16° S 167° O

**RECUERDA**

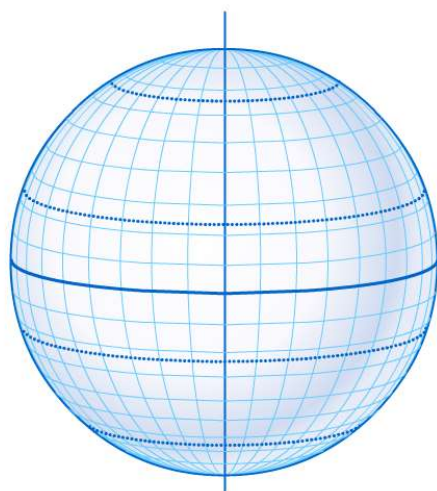
La antípoda de un punto en el globo es el punto más lejano que se puede encontrar, unidos por una recta que pasa por el centro de la Tierra y de coordenadas opuestas: la latitud antipodal es la latitud del punto cambiando Norte por Sur o Sur por Norte; la longitud antipodal es el resultado de restar 180° a la longitud del punto cambiando Este por Oeste o Oeste por Este.

696. Relaciona cada punto rojo con su antípoda azul. ¿Sabrías localizar los puntos a los que hace referencia la ilustración?



• latitud: 37° S	• latitud: 43° N	• latitud: 47° N	• latitud: 37° N
• longitud: 171° O	• longitud: 4° O	• longitud: 96° O	• longitud: 9° E
• latitud: 13° N	• latitud: 47° S	• latitud: 43° S	• latitud: 74° S
• longitud: 155° O	• longitud: 84° E	• longitud: 176° E	• longitud: 136° E
• latitud: 47° S	• latitud: 74° N	• latitud: 47° N	• latitud: 13° S
• longitud: 161° O	• longitud: 44° O	• longitud: 19° E	• longitud: 25° E

697. Relaciona cada nombre con su ubicación. Di si se refiere a un círculo máximo o no. Calcula aproximadamente sus coordenadas.



- Ecuador
- Trópico de Cáncer
- Trópico de Capricornio
- Círculo Polar Ártico
- Círculo Polar Antártico
- Polo Sur
- Polo Norte
- Eje de rotación

698. Debido a que la Tierra no es perfectamente esférica (es un elipsoide de revolución), existen variaciones en su radio: el radio polar es de 6.357 kilómetros, el radio ecuatorial es de 6.378 kilómetros y el radio medio que se toma al aproximar la Tierra como una esfera es de 6.371 kilómetros. Calcula la diferencia de longitud de los círculos máximos tomando cada uno de estos radios. ¿Qué errores se cometen al utilizar el radio medio en comparación al radio ecuatorial y al radio polar?

Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Qué matemáticas unen a un barco y un mosquito?



### DISTANCIAS MÍNIMAS

(Siguiendo círculo máximo=> toma el radio terrestre medio de 6.371km)



### Antipodales

699. ¿Qué coordenadas tiene el sitio del mundo más lejano al que nos podemos ir si vivimos en un lugar de coordenadas: latitud 30º Norte, longitud 111ºEste? ¿Cómo se llama este punto del globo? ¿A cuántos kilómetros está este punto de nuestra casa?
700. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre el punto terrestre de coordenadas 7º Norte, 170º Oeste y su antípoda. Da las coordenadas de esta antípoda. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?
701. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre el punto terrestre de coordenadas 88º Sur, 5º Este y su antípoda. Da las coordenadas de esta antípoda. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?



702. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre el punto terrestre de coordenadas  $90^\circ$  Norte,  $0^\circ$  Oeste y su antípoda. Da las coordenadas de esta antípoda. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?

703. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre el punto terrestre de coordenadas  $24^\circ$  Sur,  $105^\circ$  Este y su antípoda. Da las coordenadas de esta antípoda. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?

704. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre el punto terrestre de coordenadas  $72^\circ$  Sur,  $90^\circ$  Oeste y su antípoda. Da las coordenadas de esta antípoda. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?

**Misma longitud (sobre un meridiano)**

705. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 27^\circ$  Norte,  $7^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow 46^\circ$  Norte,  $7^\circ$  Oeste. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?

706. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 81^\circ$  Norte,  $142^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow 46^\circ$  Norte,  $142^\circ$  Oeste. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?

707. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 16^\circ$  Norte,  $21^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow 65^\circ$  Norte,  $21^\circ$  Oeste. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?

708. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 25^\circ$  Sur,  $160^\circ$  Este y B  $\Rightarrow 85^\circ$  Sur,  $160^\circ$  Este. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?

709. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 84^\circ$  Norte,  $12^\circ$  Este y B  $\Rightarrow 50^\circ$  Norte,  $12^\circ$  Este. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?

710. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 48^\circ$  Norte,  $137^\circ$  Este y B  $\Rightarrow 3^\circ$  Sur,  $137^\circ$  Este. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?

711. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 55^\circ$  Norte,  $43^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow 74^\circ$  Sur,  $43^\circ$  Oeste. ¿En qué continentes se encuentran estos dos puntos?

712. Yo estoy sobre el ecuador, en la posición  $0^\circ$  Norte,  $0^\circ$  Este. ¿Qué coordenadas tienen los **dos** lugares del globo que están a un  $30^\circ$  de circunferencia máxima **sobre mi meridiano**? ¿Qué distancia hay entre ellos?

713. Yo estoy sobre el ecuador, en la posición  $0^\circ$  Sur,  $0^\circ$  Oeste. ¿Qué coordenadas tienen los **dos** lugares del globo que están a un  $100^\circ$  de circunferencia máxima **sobre mi meridiano**? ¿Qué distancia hay entre ellos?

714. Yo estoy sobre el ecuador, en la posición  $0^\circ$  Sur,  $0^\circ$  Este. ¿Qué coordenadas tienen los **dos** lugares del globo que están a la mitad de circunferencia máxima **sobre mi meridiano**? ¿Qué distancia hay entre ellos?

715. Yo estoy sobre el ecuador, en la posición  $0^\circ$  Norte,  $10^\circ$  Este. ¿Qué coordenadas tienen los **dos** lugares del globo que están a la mitad de circunferencia máxima **sobre mi meridiano**? ¿Qué distancia hay entre ellos?

716. Yo estoy sobre el ecuador, en la posición  $0^\circ$  Norte,  $54^\circ$  Oeste. ¿Qué coordenadas tienen los **dos** lugares del globo que están a un octavo de circunferencia máxima **sobre mi meridiano**? ¿Qué distancia hay entre ellos?

717. Yo estoy sobre el ecuador, en la posición  $15^\circ$  Norte,  $130^\circ$  Este. ¿Qué coordenadas tienen los **dos** lugares del globo que están a un doceavo de circunferencia máxima **sobre mi meridiano**? ¿Qué distancia hay entre ellos?



718. Yo estoy sobre el ecuador, en la posición  $45^\circ$  Sur,  $102^\circ$  Oeste. ¿Qué coordenadas tienen los **dos** lugares del globo que están a  $60^\circ$  de circunferencia máxima **sobre mi meridiano**? ¿Qué distancia hay entre ellos?

719. ¿Qué coordenadas tienen los **dos** lugares del globo que están a un cuarto de circunferencia máxima **sobre el meridiano** de la posición  $11^\circ$  Sur,  $129^\circ$  Este? ¿Qué distancia hay entre ellos?

720. ¿Qué coordenadas tienen los **dos** lugares del globo que están a un tercio de circunferencia máxima **sobre el meridiano** de la posición  $66^\circ$  Norte,  $93^\circ$  Oeste? ¿Qué distancia hay entre ellos?

721. ¿Qué coordenadas tienen los **dos** lugares del globo que están a un sexto de circunferencia máxima **sobre el meridiano** de la posición  $85^\circ$  Sur,  $15^\circ$  Este? ¿Qué distancia hay entre ellos?

722. ¿Qué coordenadas tienen los **dos** lugares del globo que están a un quinto de circunferencia máxima **sobre el meridiano** de la posición  $5^\circ$  Norte,  $21^\circ$  Este? ¿Qué distancia hay entre ellos?

**Misma latitud  $0^\circ$  (sobre el ecuador)**

723. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 0^\circ$  Norte,  $30^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow 0^\circ$  Sur,  $152^\circ$  Este. ¿En qué zona del globo se encuentran estos dos puntos?

724. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 0^\circ$  Sur,  $122^\circ$  Este y B  $\Rightarrow 0^\circ$  Sur,  $51^\circ$  Este. ¿En qué parte zona del globo se encuentran estos dos puntos?

725. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 0^\circ$  Sur,  $91^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow 0^\circ$  Sur,  $0^\circ$  Oeste. ¿En qué parte zona del globo se encuentran estos dos puntos?

726. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 0^\circ$  Sur,  $62^\circ$  Este y B  $\Rightarrow 0^\circ$  Norte,  $160^\circ$  Este. ¿En qué parte zona del globo se encuentran estos dos puntos?

727. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 0^\circ$  Sur,  $171^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow 0^\circ$  Sur,  $173^\circ$  Este. ¿En qué parte zona del globo se encuentran estos dos puntos?

### Distancias especiales

(continuación de meridiano  $\Rightarrow$  Longitud\_A + Longitud\_B =  $180^\circ$ )

728. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 28^\circ$  Sur,  $90^\circ$  Este y B  $\Rightarrow 77^\circ$  Norte,  $90^\circ$  Oeste.

729. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 12^\circ$  Norte,  $30^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow 12^\circ$  Norte,  $150^\circ$  Este.

730. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 43^\circ$  Norte,  $120^\circ$  Este y B  $\Rightarrow 33^\circ$  Sur,  $60^\circ$  Oeste.

731. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 76^\circ$  Sur,  $75^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow 76^\circ$  Norte,  $105^\circ$  Este.

732. Calcula la distancia mínima existente (siguiendo un círculo máximo) entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow 8^\circ$  Sur,  $125^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow 8^\circ$  Sur,  $55^\circ$  Este.

### HUSOS HORARIOS

**INTRODUCCIÓN.** Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca  $\Rightarrow$  ¿Por qué ganó su apuesta Phileas Fogg en "Vuelta al mundo en 80 días"?



**RECUERDA.** Existen 24 husos horarios que reflejan las 24 horas del día. Cada huso horario abarca  $15^\circ$  y, entre todos, completan los  $360^\circ$  de la circunferencia.

733. **Proyecto de investigación. Construcción de reloj solar.**  
Descárgate el documento en la sección de ejercicios de la página web de estenmáticas.
734. ¿A cuántos grados equivale cada huso horario? ¿Cuántos minutos son? ¿Cuántos husos horarios hay?
735. Calcula la diferencia horaria solar entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow$   $16^\circ$  Norte,  $30^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow$   $12^\circ$  Sur,  $45^\circ$  Oeste.
736. Calcula la diferencia horaria solar entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow$   $5^\circ$  Sur,  $30^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow$   $62^\circ$  Norte,  $20^\circ$  Este.
737. Calcula la diferencia horaria solar entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow$   $80^\circ$  Sur,  $120^\circ$  Oeste y B  $\Rightarrow$   $80^\circ$  Sur,  $100^\circ$  Este.
738. Calcula la diferencia horaria solar entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow$   $86^\circ$  Norte,  $39^\circ$  Este y B  $\Rightarrow$   $45^\circ$  Norte,  $124^\circ$  Oeste.
739. Calcula la diferencia horaria solar entre los puntos terrestres de coordenadas: A  $\Rightarrow$   $75^\circ$  Norte,  $93^\circ$  Este y B  $\Rightarrow$   $75^\circ$  Norte,  $4^\circ$  Oeste.
740. ¿En qué huso horario está la situación de coordenadas  $20^\circ$  Sur,  $12^\circ$  Oeste? Si en Madrid ( $40^\circ$  Norte  $4^\circ$  Oeste) son las 22:00

solares, ¿qué hora debería ser en ese otro lugar? ¿En qué continentes se encuentran estas dos situaciones geográficas?

741. ¿Qué hora solar será en Dakar ( $15^\circ$  Norte,  $17^\circ$  Oeste) ahora mismo si mi reloj solar marca las 16:13 y yo estoy en la posición  $35^\circ$  Norte,  $0^\circ$  Este? ¿En qué continente estoy yo ahora mismo?
742. ¿Qué hora solar será en El Cairo ( $30^\circ$  Norte,  $31^\circ$  Este) ahora mismo si mi reloj solar marca las 12:20 y yo estoy en la posición  $45^\circ$  Sur,  $10^\circ$  Este? ¿En qué continente estoy yo ahora mismo?
743. ¿Qué hora solar será en Camberra ( $34^\circ$  Sur,  $152^\circ$  Este) ahora mismo si mi reloj solar marca las 20:05 y yo estoy en la posición  $80^\circ$  Norte,  $130^\circ$  Oeste? ¿En qué continente estoy yo ahora mismo?
744. ¿En qué huso horario está la situación de coordenadas  $45^\circ$  Norte,  $120^\circ$  Este? Si en Nueva York ( $40^\circ$  Norte  $74^\circ$  Oeste) son las 14:28 horas solares, ¿qué hora debería ser en ese otro lugar? ¿En qué continente está este otro lugar?
745. ¿Qué hora solar será en un lugar de coordenadas  $25^\circ$  Sur,  $155^\circ$  Este) ahora mismo si mi reloj solar marca las 08:15 y yo estoy en la posición  $50^\circ$  Norte,  $100^\circ$  Oeste? ¿En qué continente está ese lugar y en qué continente estoy yo ahora mismo?

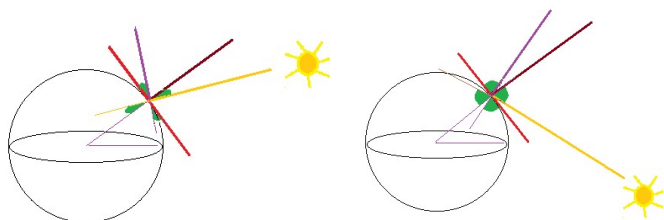
**Sol**

746. Investiga en internet, preguntando en tu ayuntamiento o con un GPS, la longitud de tu pueblo. ¿Qué diferencia horaria hay entre tu reloj de pulsera y el reloj solar?
747. Sabiendo que el sol alcanza su máxima altura al mediodía solar del solsticio de verano, calcula el ángulo que tiene en ese momento sobre el horizonte. Nota: recuerda que en el solsticio de verano el sol se encuentra en línea con el Trópico de Cáncer.
748. Imagínate que estás en un país con latitud  $10^\circ$  Norte, ¿qué altura tendría el sol en el equinoccio de otoño al mediodía? Nota: recuerda que en el equinoccio de otoño el sol se encuentra en línea con el ecuador.





749. ¿Sale el sol siempre por el mismo sitio? ¿Es siempre la sombra de un mismo objeto igual de alargada a lo largo del año (siempre medida a la misma hora)? Investiga qué forma tiene.
750. ¿Hacia dónde cae la sombra? ¿Es en todos los países así? Justifica tus respuestas.
751. Para ver el arcoíris en un sitio llano se necesita que el sol alcance una altura no superior a  $42^\circ$ . ¿En qué horas y épocas del año se te ocurre que eso puede pasar? Justifica tu respuesta. Busca en [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es) la pregunta matemática: **¿Se ve el arcoíris siempre que llueve y sale el sol?**
752. Habrás visto alguna vez placas fotovoltaicas mirando al sol. Las puede haber fijas o con motor. Reflexiona sobre el ángulo en el que están colocadas. ¿Qué criterios se sigue para ello? Halla esos ángulos de inclinación óptima en el equinoccio de primavera y en el solsticio de invierno (al mediodía para simplificar las cosas). ¿A qué momentos corresponderán los dibujos? Describe cada una de las rectas y ángulos que aparecen en estas figuras.



### PROYECCIONES TERRESTRES Y CÁNEVAS (RETÍCULAS)

INTRODUCCIÓN. Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Qué comparten la sombra, una fotografía, las constelaciones y los mapas? ¿Son los países siempre igual de grandes en los mapas?



### RECUERDA

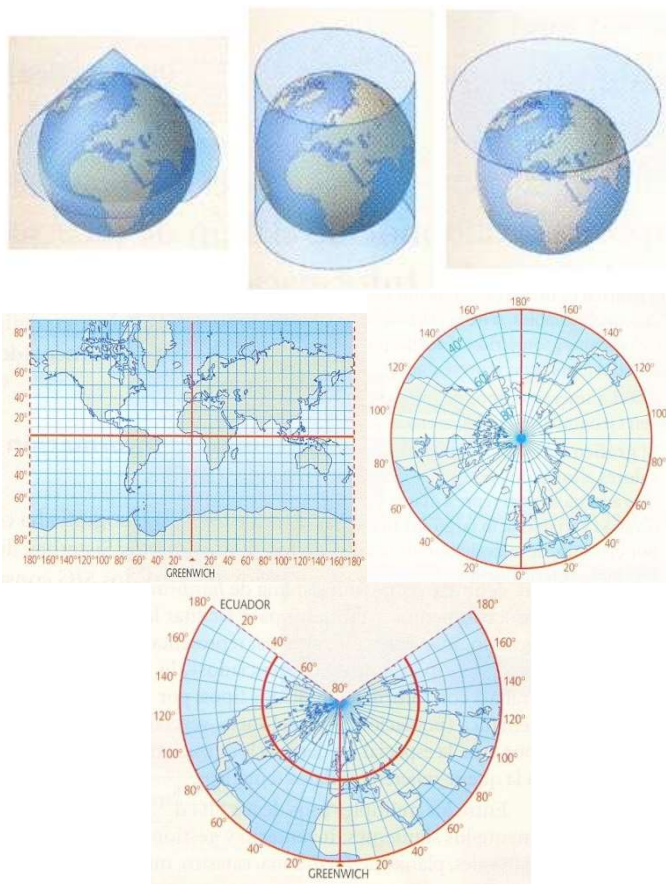
@ Las proyecciones que estudiamos aquí se obtienen de una superficie auxiliar que puede ser el plano (proyección AZIMUTAL), el cilindro (proyección CILÍNDRICA) o el cono (proyección CÓNICA).

@ Dependiendo de dónde esta superficie auxiliar toque al globo, la proyección se apellidará POLAR (en alguno de los polos), ECUATORIAL (en el ecuador) u OBLICUA (en cualquier ángulo).

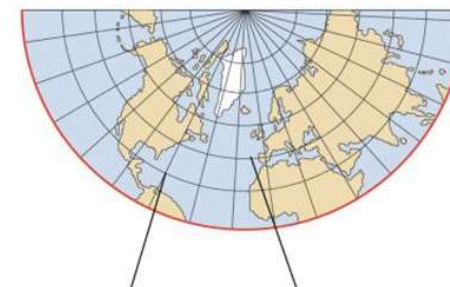
@ En la proyección azimutal, según el punto origen de proyección, se le agregará al nombre el apelativo de GNOMÓNICA (desde el centro del globo), ESTEREOGRÁFICA (punto sobre la superficie del globo), ESCENOGRÁFICA (punto fuera del globo) u ORTOGRÁFICA (punto exterior al globo tan lejano que se trabaja con una sola dirección).



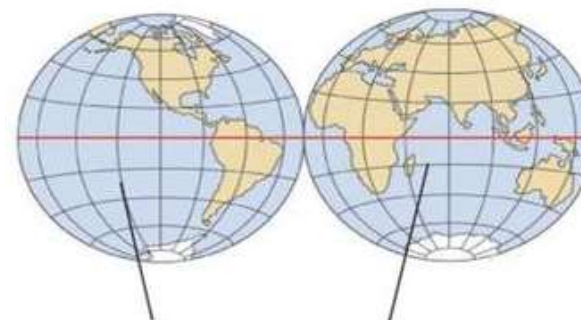
753. Relaciona cada proyección con su cánevas. ¿Cómo se llama cada una?



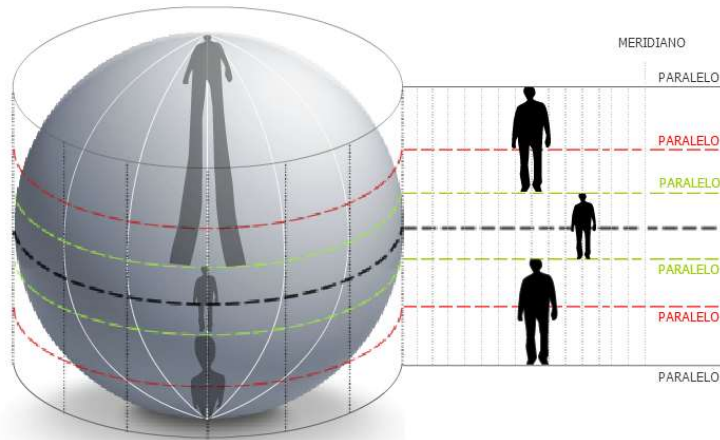
754. ¿Cómo se llama esta proyección? Dibuja de dónde sale. ¿En qué se convierten los meridianos y los paralelos? Reflexiona sobre la separación entre ellos y las distorsiones que motiva.



755. Dibuja de dónde sale la siguiente retícula (cáneas). ¿Cuáles son los meridianos y cuáles los paralelos? Reflexiona sobre la separación entre ellos y dónde genera las distorsiones.

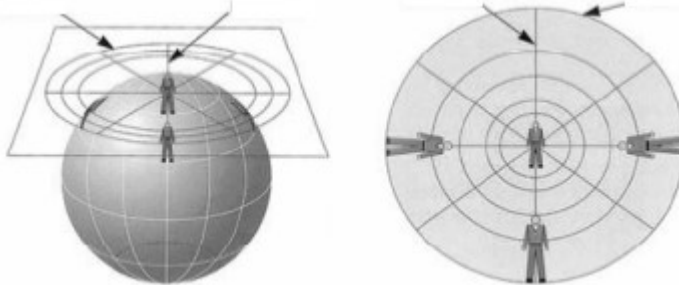


756. ¿A qué proyección se refiere esta distorsión de áreas?

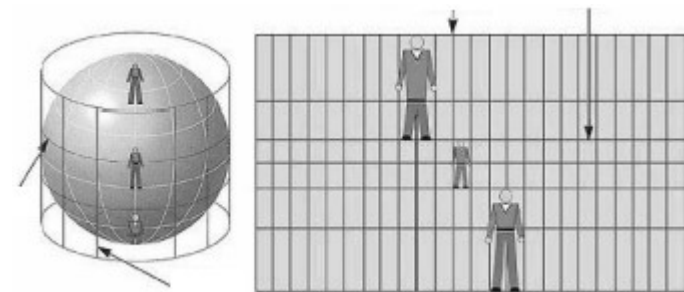


757. Dibuja dos formas de proyectar el globo y traza los cánvas (retículas) que se obtienen. ¿Qué proyecciones has escogido? ¿En qué se convierten los meridianos y los paralelos? Discute la separación entre ellos.

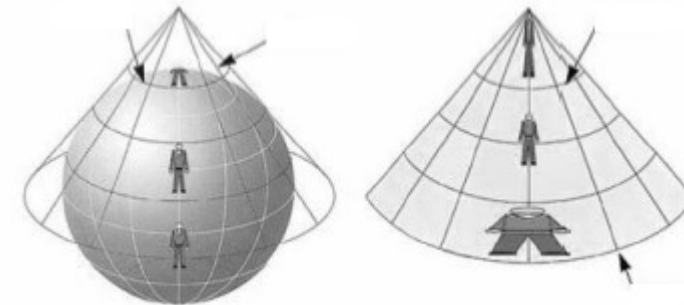
758. ¿Qué proyección es la siguiente? ¿A qué corresponden las líneas que aparecen? Explica las deformaciones que aparecen.



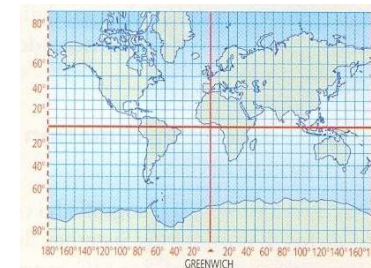
759. ¿Qué proyección es la siguiente? ¿A qué corresponden las líneas que aparecen? Explica las deformaciones que aparecen.



760. ¿Qué proyección es la siguiente? ¿A qué corresponden las líneas que aparecen? Explica las deformaciones que aparecen.



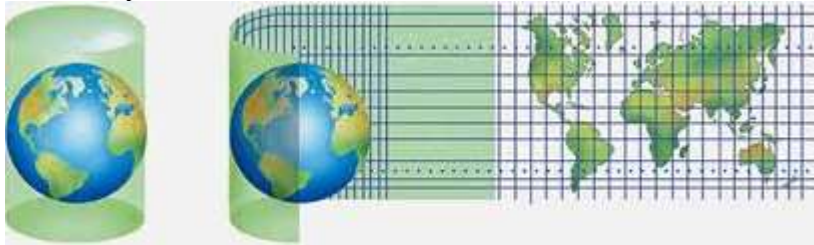
761. ¿A qué proyección puede haberse debido este cánvas (retícula)? ¿A qué corresponden las líneas que aparecen? ¿A qué se debe la separación entre líneas?



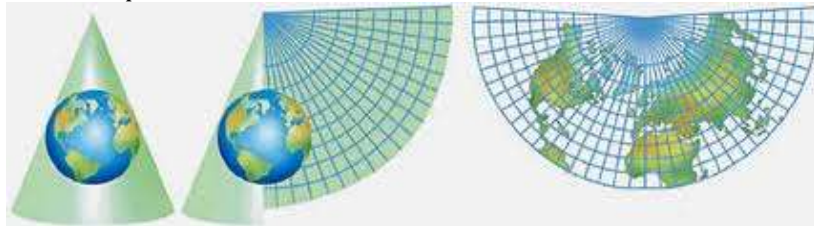




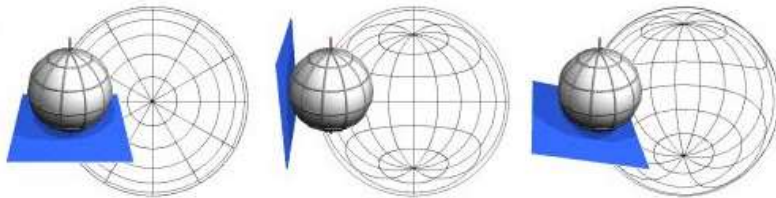
762. ¿Cómo se llama esta proyección? ¿Crees que está bien dibujada la cánvas (retícula) de esta proyección? ¿En qué se convierten los meridianos y los paralelos? ¿La separación entre ellos es siempre la misma?



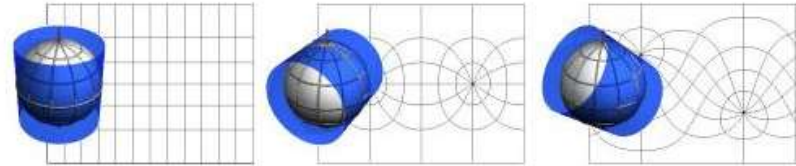
763. ¿Cómo se llama esta proyección? ¿Crees que está bien dibujada la cánvas (retícula) de esta proyección? ¿En qué se convierten los meridianos y los paralelos? ¿La separación entre ellos es siempre la misma?



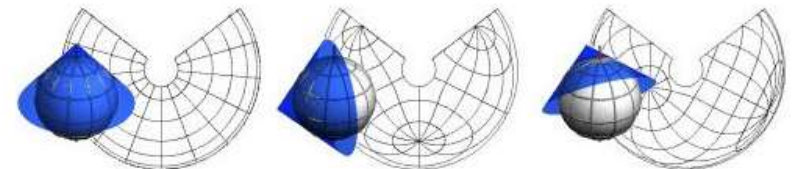
764. ¿Cómo se llaman estas proyecciones? ¿En qué se convierten los meridianos y los paralelos? ¿Dónde se presentarán las distorsiones en cada caso?



765. ¿Cómo se llaman estas proyecciones? ¿En qué se convierten los meridianos y los paralelos? ¿Dónde se presentarán las distorsiones en cada caso?



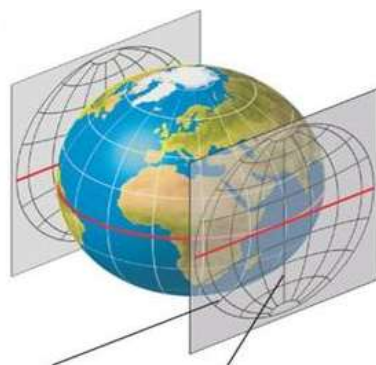
766. ¿Cómo se llaman estas proyecciones? ¿En qué se convierten los meridianos y los paralelos? ¿Dónde se presentarán las distorsiones en cada caso?



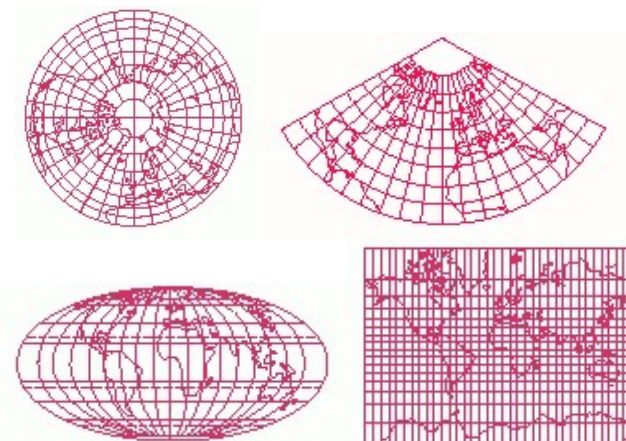
767. Dibuja la distribución de meridianos y paralelos que presulta de esta proyección. ¿Cómo se llama? Dibuja las distorsiones que motiva.



768. Dibuja la distribución de meridianos y paralelos que presulta de esta proyección. ¿Cómo se llama? Dibuja las distorsiones que motiva.



769. ¿Cómo se ha conseguido esta distribución de meridianos y paralelos? ¿Cuáles son los meridianos y cuáles los paralelos?



## TRIGONOMETRÍA

INTRODUCCIÓN. Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Qué tienen en común (matemáticamente hablando) un cuaderno, la miel, el ADN y las tuercas?



La trigonometría relaciona los lados y los ángulos de un triángulo.





**RECUERDA.** Los ángulos se miden en:

**GRADO SEXAGESIMAL (DEG)** => unidad angular que divide a la circunferencia en 360°. El cuadrante tiene 90°. Media circunferencia 180°.

**DIVISORES**

1 grado sexagesimal = 60 minutos sexagesimales (60')

1 minuto sexagesimal = 60 segundos sexagesimales (60'')

**GRADO CENTESIMAL (GRAD)** => unidad angular que divide a la circunferencia en 400°. El cuadrante tiene 100°. Media circunferencia 200°.

**DIVISORES**

1 grado centesimal = 100 minutos centesimales (100<sup>m</sup> o 100<sup>c</sup>)

1 minuto centesimal = 100 segundos centesimales (100<sup>s</sup> o 100<sup>cc</sup>)

**RADIANES (RAD)** => unidad angular que divide a la circunferencia en  $2\pi$  rad. El cuadrante tiene  $\pi/2$  rad. La media circunferencia  $\pi$  rad. Un ángulo de 1 radián corresponde al arco de circunferencia cuya longitud es su radio. Nota1: Fácil de recordar si aplicas la fórmula  $\text{arco} = \alpha \cdot R$ . Nota2: por eso la media circunferencia mide 3,14... veces su radio.

**El radián es la unidad de ángulo plano en el SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES.**

**Pasa las siguientes medidas de ángulos en grados sexagesimales a radianes:**

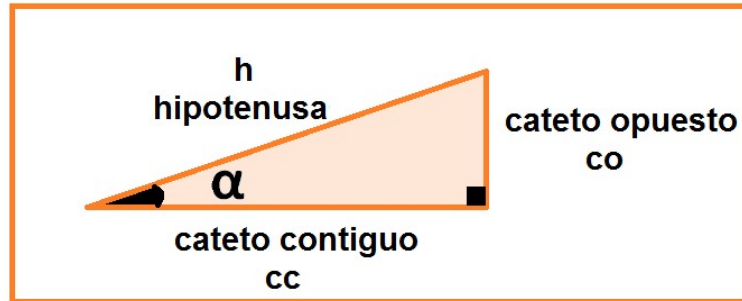
- 770. 30°
- 771. 45°
- 772. 90°
- 773. 120°
- 774. 150°
- 775. 60°
- 776. 180°
- 777. 210°
- 778. 390°
- 779. 415°

- 780. 720°
- 781. 1300°
- 782. 540°
- 783. 900°
- 784. 1235°

**Pasa las siguientes medidas de ángulos en radianes a grados sexagesimales:**

- 785.  $5\pi$
- 786.  $3\pi/2$
- 787.  $2\pi/3$
- 788.  $\pi/4$
- 789.  $7\pi/2$
- 790.  $5\pi/4$
- 791.  $\pi/3$
- 792.  $3\pi/4$
- 793.  $\pi/8$
- 794.  $9\pi/5$
- 795.  $6\pi$
- 796.  $11\pi/6$
- 797.  $5\pi/3$
- 798.  $4\pi/3$
- 799.  $5\pi/6$

**RAZONES TRIGONOMÉTRICAS**  
(triángulos rectángulos)



Coseno $\cos \alpha = \frac{cc}{h}$	Seno $\sin \alpha = \frac{co}{h}$	Tangente $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{co}{cc}$
Secante $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$	Cosecante $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$	Cotangente $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{cc}{co}$



#### FÓRMULA FUNDAMENTAL

$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

Nota: fácil de recordar si piensas en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 1 unidad y aplicas el teorema de Pitágoras.

En trigonometría, todos los resultados a 5 cifras significativas.

800. Usando la fórmula fundamental de la trigonometría, halla en cada apartado el resto de razones trigonométricas de estos ángulos

agudos sabiendo lo siguiente: a)  $\sin 12^\circ = 0,20791$ ; b)  $\cos 36^\circ = 0,80902$ ; c)  $\cos 52^\circ = 0,61566$ ; d)  $\sin 81^\circ = 0,98769$ .

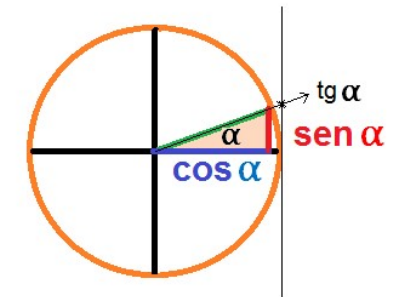
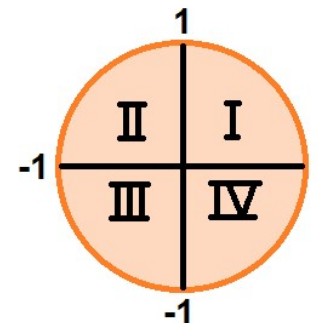
801. En cada apartado, halla el resto de razones trigonométricas de los ángulos agudos sabiendo lo siguiente: a)  $\cos \alpha = 0,15$ ; b)  $\sin \theta = 0,93$ ; c)  $\cos \beta = 0,207$ ; d)  $\sin \delta = 0,385$ .

802. En cada apartado, halla el resto de razones trigonométricas de los ángulos agudos sabiendo lo siguiente: a)  $\cos \alpha = 0,5605$ ; b)  $\sin \beta = 0,094$ ; c)  $\cos \theta = 0,0032$ ; d)  $\sin \delta = 0,7935$ .

#### RECUERDA



#### cuadrantes





	I	II	III	IV
sen $\alpha$	+	+	-	-
cos $\alpha$	+	-	-	+
tg $\alpha$	+	-	+	-

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

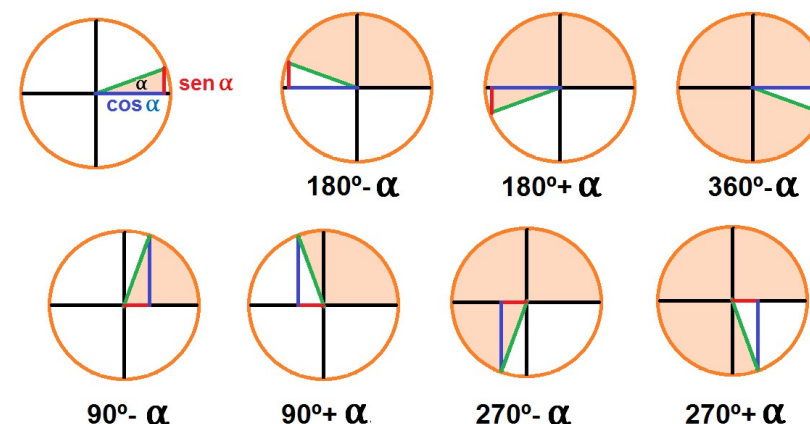
IMPORTANTE

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

IMPORTANTE DEDUCIR/MEMORIZAR

	0° 0 rad	30° $\pi/6$ rad	45° $\pi/4$ rad	60° $\pi/3$ rad	90° $\pi/2$ rad	180° $\pi$ rad	270° $3\pi/2$ rad	360° $2\pi$ rad
sen $\alpha$	0	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$	1	0	-1	0
cos $\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$	$\frac{1}{2} = 0,5$	0	-1	0	1
tg $\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$	1	$\sqrt{3} \approx 0,732$	$\infty$	0	$\infty$	0

803. **Resuelto en youtube.** Razonando con el dibujo siguiente, deduce las razones trigonométricas de  $90^\circ \pm \alpha$ ,  $180^\circ \pm \alpha$ ,  $270^\circ \pm \alpha$ ,  $360^\circ \pm \alpha$ .



804. ¿A qué ángulos del primer cuadrante son asimilables los ángulos  $4005^\circ$  y  $13\pi/4$ ? Averigua sus razones trigonométricas.
805. Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos sin calculadora:  $450^\circ$ ,  $600^\circ$ ;  $3\pi$ ;  $11\pi/4$ .
806. Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos sin calculadora:  $1380^\circ$ ;  $945^\circ$ ;  $1590^\circ$ .
807. Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos sin calculadora:  $3000^\circ$ ;  $570^\circ$ ;  $1035^\circ$ .
808. Sin calculadora, halla las razones trigonométricas de los ángulos siguientes empleando la pista entre paréntesis:  $135^\circ$  ( $=180^\circ-45^\circ$ );  $240^\circ$  ( $=180^\circ+60^\circ$ );  $330^\circ$  ( $=360^\circ-30^\circ$ );  $2\pi/3$  rad ( $=\pi/2$  rad +  $\pi/6$  rad).
809. Con las razones trigonométricas de los ángulos  $12^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $52^\circ$  y  $81^\circ$ , halla las razones de los siguientes ángulos empleando la pista entre paréntesis:  $102^\circ$  ( $=90^\circ+12^\circ$ );  $168^\circ$  ( $=180^\circ-12^\circ$ );  $54^\circ$  ( $=90^\circ-36^\circ$ );  $322^\circ$  ( $=270^\circ+52^\circ$ );  $279^\circ$  ( $=360^\circ-81^\circ$ );  $261^\circ$  ( $=180^\circ+81^\circ$ );  $218^\circ$  ( $=270^\circ-52^\circ$ );  $99^\circ$  ( $=180^\circ-81^\circ$ ).

SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

#### ÁNGULO DOBLE

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

#### ÁNGULO MITAD

$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$



810. Con las razones trigonométricas de los ángulos  $12^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $52^\circ$  y  $81^\circ$ , halla las de los siguientes ángulos ayudándote de las fórmulas aprendidas para la suma y resta de ángulos:  $48^\circ (=12^\circ+36^\circ)$ ;  $24^\circ (=36^\circ-12^\circ)$ ;  $88^\circ (=36^\circ+52^\circ)$ ;  $133^\circ (=52^\circ+81^\circ)$ .

811. Con las razones trigonométricas de los ángulos  $12^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $52^\circ$  y  $81^\circ$ , halla las de los siguientes ángulos ayudándote de las fórmulas aprendidas para la suma/resta de ángulos y ángulo doble:  $29^\circ (=81^\circ-52^\circ)$ ;  $64^\circ (=12^\circ+52^\circ)$ ;  $162^\circ (=2 \cdot 81^\circ)$ ;  $-198^\circ (=360^\circ-162^\circ)$ .

812. Con las razones trigonométricas de los ángulos  $12^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $52^\circ$  y  $81^\circ$ , halla las de los siguientes ángulos ayudándote de las fórmulas

aprendidas para la suma/resta de ángulos y ángulo doble/mitad:  $6^\circ (=12^\circ/2)$ ;  $40^\circ (=52^\circ-12^\circ)$ ;  $104^\circ (=2 \cdot 52^\circ)$ ;  $18^\circ (=36^\circ/2)$ .

813. Con la pista entre paréntesis y usando las razones trigonométricas de los ángulos  $12^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $52^\circ$  y  $81^\circ$ , halla las razones de los siguientes ángulos ayudándote de las fórmulas aprendidas:  $26^\circ (=52^\circ/2)$ ;  $-26^\circ$ ;  $13^\circ (=26^\circ/2)$ ;  $-13^\circ$ ;  $72^\circ (=2 \cdot 36^\circ)$ ;  $-72^\circ$ ;  $85^\circ (=72^\circ+13^\circ)$ ;  $-85^\circ$ ;  $59^\circ (=72^\circ-13^\circ)$ ;  $-59^\circ$ .

814. Con la pista entre paréntesis, halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:  $15^\circ (=30^\circ/2)$ ;  $-15^\circ$ ;  $120^\circ (=90^\circ+30^\circ)$ ;  $22,5^\circ (=45^\circ/2)$ ;  $7,5^\circ (=15^\circ/2)$ ;  $105^\circ (=90^\circ+15^\circ)$ ;  $-105^\circ$ ;  $52,5^\circ (=105^\circ/2)$ ;  $75^\circ (=45^\circ+30^\circ)$ ;  $255^\circ (=270^\circ-15^\circ)$ ;  $285^\circ (=270^\circ+15^\circ)$ ;  $150^\circ (=2 \cdot 75^\circ)$ .

815. Con la pista entre paréntesis, halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:  $75^\circ (=45^\circ+30^\circ)$ ;  $-75^\circ$ ;  $165^\circ (=90^\circ+75^\circ)$ ;  $435^\circ (=360^\circ+75^\circ)$ ;  $300^\circ (= -60^\circ)$ ;  $-300^\circ$ ;  $315^\circ (= -45^\circ)$ ;  $135^\circ (=90^\circ+45^\circ)$ ;  $1740^\circ$  (usando  $60^\circ$ );  $825^\circ$  (usando  $75^\circ$ );  $-825^\circ$ ;  $525^\circ$  (usando  $75^\circ$ );  $-525^\circ$ .

816. Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos en radianes:  $\pi + \pi/4$ ;  $3\pi/2 + \pi/6$ ;  $\pi/2 - \pi/3$ ;  $2\pi - \pi/4$ ;  $13\pi/6$ ;  $\pi + 3\pi/2$ ;  $-4\pi/3$  ( $=\pi/6 - 3\pi/2$ );  $2\pi/3$  (con ángulo doble de  $\pi/3$ ).

#### RECUERDA

Relación derivada de la fórmula fundamental:  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$





817. Si  $\alpha$  es un ángulo del segundo cuadrante y  $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$ , calcula el valor de  $\cos \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ . ¿Cuánto vale  $\alpha$  (no te olvides de sumar  $360^\circ \cdot k$  o  $2k\pi$  rad)?
818. Si  $\beta$  es un ángulo del tercer cuadrante y  $\operatorname{tg} \beta = 3/4$ , calcula el valor de las restantes razones trigonométricas. ¿Cuánto vale  $\beta$  (no te olvides de sumar  $360^\circ \cdot k$  o  $2k\pi$  rad)?
819. Si  $\alpha$  es un ángulo del segundo cuadrante y  $\sin \alpha = 0,65$ , calcula el valor del resto de razones trigonométricas. ¿Cuánto vale  $\alpha$  (no te olvides de sumar  $360^\circ \cdot k$  o  $2k\pi$  rad)?
820. **Resuelto en youtube.** Si  $\sigma$  es un ángulo del tercer cuadrante y  $\cos \sigma = -0,8$ , calcula el valor del resto de razones trigonométricas. ¿Cuánto vale  $\sigma$  (no te olvides de sumar  $360^\circ \cdot k$  o  $2k\pi$  rad)?
821. Si  $\theta$  es un ángulo del cuarto cuadrante y  $\operatorname{tg} \theta = -0,04$ , calcula el valor del resto de razones trigonométricas. ¿Cuánto vale  $\theta$  (no te olvides de sumar  $360^\circ \cdot k$  o  $2k\pi$  rad)?
822. Si  $\theta$  es un ángulo del tercer cuadrante y  $\operatorname{tg} \theta = 10,43$ , calcula el valor del resto de razones trigonométricas.
823. Si  $\alpha$  es un ángulo del cuarto cuadrante y  $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$ , calcula el valor de  $\sin \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ .
824. Si  $\theta$  es un ángulo del segundo cuadrante y  $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{3}$ , calcula el valor de  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ .
825. Si  $\beta$  es un ángulo del tercer cuadrante y  $\sin^2 \beta = 1/2$ , calcula el valor de todas las razones trigonométricas.
826. Si  $\alpha$  es un ángulo del cuarto cuadrante y  $\cos^2 \alpha = 0,64$ , calcula el valor de todas las razones trigonométricas.
827. Si  $\alpha$  es un ángulo del segundo cuadrante y  $\cos^2 \alpha = 0,144$ , calcula el valor de todas las razones trigonométricas.
828. Sabiendo que  $\cos \alpha = 0,3$ , halla: a) las razones trigonométricas del ángulo  $270^\circ - \alpha$ ; b) las razones trigonométricas del ángulo  $270^\circ + \alpha$ ; c) las razones trigonométricas de  $180^\circ + \alpha$ .

829. Calcula  $\alpha$  sabiendo que es un ángulo del cuarto cuadrante y  $\cos \alpha = 0,7$ . Utilizando las fórmulas trigonométricas, calcula ahora el seno y el tangente de  $\alpha$  y de los ángulos  $\alpha - 30^\circ$ ,  $\alpha/2$ ,  $2\alpha$ .
830. Calcula  $\alpha$  sabiendo que es un ángulo del tercer cuadrante y  $\operatorname{tg} \alpha = 5$ . Utilizando las fórmulas trigonométricas, calcula ahora las razones trigonométricas (solo seno y coseno) de los ángulos  $\alpha - 30^\circ$ ,  $\alpha/2$ ,  $2\alpha$ .
831. Calcula  $\alpha$  sabiendo que es un ángulo del tercer cuadrante y que  $\sin \alpha = -0,95$ . Utilizando las fórmulas trigonométricas, calcula ahora el coseno y la tangente de  $\alpha$  y de los ángulos  $\alpha - 120^\circ$ ,  $\alpha/2$ ,  $2\alpha$ .
832. **Parcialmente resuelto en youtube.** Calcula  $\alpha$  sabiendo que es un ángulo del segundo cuadrante y  $\operatorname{tg} \alpha = -36$ . Utilizando las fórmulas trigonométricas, calcula ahora el seno y coseno de  $\alpha$  y de los ángulos  $\alpha - 60^\circ$ ,  $\alpha/2$ ,  $2\alpha$ .
833. Calcula  $\alpha$  sabiendo que es un ángulo del tercer cuadrante y que  $\operatorname{tg} \alpha = 20,5$ . Utilizando las fórmulas trigonométricas, calcula ahora el coseno y el seno de  $\alpha$  y de los ángulos  $\alpha + 30^\circ$ ,  $\alpha/2$ ,  $2\alpha$ .

#### DEMOSTRACIONES TRIGONOMÉTRICAS

**Importante: comprueba antes si se cumplen las expresiones.**



834. Demuestra, usando un triángulo rectángulo isósceles, las razones trigonométricas del ángulo de  $45^\circ$ .
835.  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \sec \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$
836.  $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sec \alpha - \cos \alpha$





837.  $\frac{1}{tg\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\alpha}$
838.  $tg\alpha \cdot \cotg\alpha = 1$
839.  $\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$
840.  $\frac{tg^2\varphi + 2\text{sen}^2\varphi}{tg^2\varphi} = 1 + 2\cos^2\varphi$
841. **Resuelto en youtube.**  $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$
842.  $1 + tg^2\beta = \sec^2\beta$
843.  $1 + \cotg^2\theta = \text{cosec}^2\theta$
844.  $\text{sen}^2(\delta/2) = \frac{1}{2} - \frac{\cos\delta}{2}$
845.  $\text{sen}^2(2\alpha) = 4\cos^2\alpha - 4\cos^4\alpha$
846.  $(-tg^2\alpha): \left(\frac{-2}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{\text{sen}^2\alpha}{2}$
847.  $\frac{1}{2} - \text{sen}^2(\delta) = \frac{\cos^2(\delta) - \text{sen}^2(\delta)}{2}$
848.  $-\frac{5 \cdot \text{sen} 2\alpha}{9} = (-tg\alpha): \left(\frac{9}{10 \cdot \cos^2\alpha}\right)$
849.  $(\sec\alpha - 1) \cdot (\sec\alpha + 1) = tg^2\alpha$
850. **Resuelto en youtube.**  $(-tg\alpha): \left(\frac{-13}{14 \cdot \cos^2\alpha}\right) = \frac{7 \cdot \text{sen} 2\alpha}{13}$
851.  $tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}$
852.  $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} \Rightarrow$  Nota: sustituye las fórmulas para el coseno y el seno de la suma; divide luego entre  $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ .
853.  $\sec\alpha + tg\alpha = \frac{\cos\alpha}{1 - \text{sen}\alpha} \Rightarrow$  Nota: tendrás que factorizar una identidad notable.

#### PARALELOS DEL GLOBO (distancias)

Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca  $\Rightarrow$  ¿Qué matemáticas unen a un barco y un mosquito?



#### Paralelos (tomar el radio medio terrestre R=6.371km)

854. Calcula la longitud del paralelo correspondiente al Trópico de Cáncer. Nota: recuerda que el Trópico de Cáncer está a latitud 23º Norte.
855. Calcula la longitud del paralelo correspondiente al Trópico de Capricornio.
856. Calcula la longitud del paralelo del Círculo Polar Ártico. Nota: recuerda que el Círculo Polar Ártico es la latitud aproximada 66º Norte.
857. Calcula la longitud del paralelo del Círculo Polar Antártico.
858. Las coordenadas de Madrid son 40º Norte, 4º Oeste. Las de Nueva York son 40º Norte, 78º Oeste. Madrid y Nueva York están, por tanto, sobre el mismo paralelo. ¿Qué diferencia de kilómetros hay entre el círculo máximo estándar del globo y el paralelo 40º Norte? ¿Qué distancia separa Nueva York de Madrid siguiendo el paralelo?
859. Calcula la longitud del paralelo donde se encuentra El Cairo (30º Norte, 31º Este). Si una persona viaja desde El Cairo 423km al Oeste siguiendo ese paralelo, ¿en qué posición terrestre terminará?
860. Calcula la longitud del paralelo donde se encuentra Cambera (34º Sur, 152º Este). Si otra persona se encuentra en la posición 34º Sur, 82º Oeste, ¿qué distancia los separa sobre ese paralelo?



861. Calcula la longitud del paralelo donde se encuentra Dakar (15° Norte, 17° Oeste). Si una persona viaja desde Dakar 17.532km al Oeste siguiendo ese paralelo, ¿en qué posición terrestre terminará?
862. ¿Qué diferencia de kilómetros hay entre el círculo máximo estándar del globo y el paralelo de la posición 35° Sur, 71° Oeste? Si una persona viaja al Este 614km siguiendo ese paralelo, ¿en qué posición terrestre terminará?
863. ¿Qué diferencia de kilómetros hay entre el círculo máximo estándar del globo y el paralelo de la posición 7° Norte, 124° Oeste? Si una persona se encuentra en la posición 7° Norte, 90° Este, ¿qué distancia separa estas dos posiciones sobre ese paralelo?
864. ¿Qué diferencia de kilómetros hay entre el círculo máximo estándar del globo y el paralelo de la posición 85° Sur, 56° Este? Si una persona viaja al Este 8.002km siguiendo ese paralelo, ¿en qué posición terrestre terminará?
865. ¿Qué diferencia de kilómetros hay entre el círculo máximo estándar del globo y el paralelo de la posición 13° Norte, 82° Este? Si una persona se encuentra en la posición 13° Norte, 0° Este, ¿qué distancia separa estas dos posiciones sobre ese paralelo?
866. ¿Qué diferencia de kilómetros hay entre el círculo máximo estándar del globo y el paralelo de la posición 62° Norte, 95° Oeste? Si una persona viaja al Oeste 14.300km siguiendo ese paralelo, ¿en qué posición terrestre terminará?
867. ¿Qué diferencia de kilómetros hay entre el círculo máximo estándar del globo y el paralelo de la posición 41° Sur, 3° Este? Si una persona se encuentra en la posición 41° Sur, 69° Oeste, ¿qué distancia separa estas dos posiciones sobre ese paralelo?
868. ¿Qué diferencia de kilómetros hay entre el círculo máximo estándar del globo y el paralelo de la posición 22° Sur, 0° Oeste? Si una persona viaja al Este 1.2054km siguiendo ese paralelo, ¿en qué posición terrestre terminará?

#### TIRO PARABÓLICO

(trayectoria ideal, despreciando efectos y rozamientos)

Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Qué tienen en común, matemáticamente hablando, las fuentes, los policías y los futbolistas?



Parábola (x e y distancias):  $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}$ , donde  $v_0$  es la velocidad inicial,  $g$  la gravedad y  $\alpha$  el ángulo de lanzamiento.

$$\text{Alcance máximo horizontal} = x_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

$$\text{Alcance máximo vertical} = y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

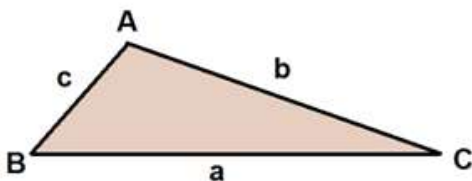
¡OJO! ¡La velocidad y la gravedad deben estar en las mismas unidades!

869. ¿Cuál es la fórmula de la trayectoria que sigue un balón lanzado a 100km/h con un ángulo de 20°? ¿Cuál será el alcance máximo horizontal? ¿A qué altura llegará? Dibuja la situación.
870. Dada una determinada velocidad, ¿con qué ángulo se ha de lanzar una pelota para llegar lo más lejos posible? ¿Llega igual de lejos a 20° que a 70°? ¿Por qué? ¿Con qué otros ángulos pasa lo esto mismo?
871. Un jugador de fútbol tira los penaltis a 105km/h. ¿Podrá meter gol si lanza el balón con 65°? Da la fórmula de la trayectoria parabólica y dibuja la situación. Nota: la portería mide 7,32m x 2,44m y la línea de penaltis está a 11m de la portería.
872. Un delantero de fútbol se encuentra en la línea del área con el portero (1,85m) a mitad de camino entre él y la portería. Si lanza el



balón a 35km/h con un ángulo de 80°, ¿hará una vaselina? Da la fórmula de la trayectoria parabólica y dibuja la situación. Nota: considerar al delantero frente a la portería, punto donde la línea de área está a 16,5m.

### POLÍGONOS CON TRIGONOMETRÍA



**Teorema del coseno:**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$

**Teorema del seno:**  $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

**CONSEJO:** empieza a calcular los ángulos de menor a mayor, así evitarás posibles equivocaciones si aparece un ángulo obtuso. Para hacer esto reflexiona antes sobre la máxima "a mayor lado se opone mayor ángulo" y calcula primero el ángulo más pequeño a tu alcance. Recuerda luego que los tres ángulos de un triángulo suman 180°.

**SI NO SIGUES EL CONSEJO:** recuerda que un seno positivo puede corresponder a un ángulo del cuadrante I o del cuadrante II. Sin embargo, la calculadora solo te dará el ángulo del cuadrante I, por lo que tendrás que restárselo a 180° en caso de necesitar el ángulo del cuadrante II.

Reflexiona sobre lo ya estudiado en cursos anteriores: cuando  $a^2 > b^2 + c^2$ , el triángulo no es ni rectángulo ni acutángulo sino obtusángulo.



### RECUERDA

Resolver un triángulo es calcular el valor de sus tres ángulos y sus tres lados.

Para resolver un triángulo se necesitan tres datos, uno de los cuales habrá de ser necesariamente un lado.

873. **Resuelto en youtube.** Resuelve el triángulo con  $a=22\text{cm}$ ,  $c=7\text{cm}$ ,  $\hat{B}=40^\circ$ .
874. **Resuelto en youtube.** Resuelve el triángulo con  $a=16\text{cm}$ ,  $b=12\text{cm}$ ,  $c=10\text{cm}$ .
875. Resuelve el triángulo con  $a=7.5\text{cm}$ ,  $b=5\text{cm}$ ,  $\hat{A}=111^\circ$ .
876. Resuelve el triángulo con  $a=14\text{cm}$ ,  $b=11\text{cm}$ ,  $c=6\text{cm}$ .
877. Resuelve el triángulo con  $b=9\text{cm}$ ,  $c=7\text{cm}$ ,  $\hat{B}=65^\circ$ .
878. Resuelve el triángulo con  $a=16\text{cm}$ ,  $b=8\text{cm}$ ,  $\hat{B}=30^\circ$ .
879. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30cm y uno de sus catetos 10,8cm. Resuelve el triángulo.
880. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30cm y la proyección de un cateto sobre ella 10,8cm. Resuelve el triángulo. Nota: aquí tendrás que usar el teorema de la altura visto el curso pasado  $h^2=n \cdot m$ , donde  $n$  y  $m$  son las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.
881. Calcula el área de una parcela triangular de lados 50m, 20m y 40m sin emplear la fórmula de Herón.



882. Resuelve el rombo de diagonal menor 8cm y uno de sus ángulos interiores  $30^\circ$ .
883. Calcula el área de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de radio 15cm.
884. **Resuelto en youtube.** Calcula el lado del pentágono regular que tiene sus diagonales de 12cms (todas iguales).
885. Deduce la fórmula del área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio R. ¿Qué propiedad de triángulos y lugares geométricos has empleado? Nota: tiene que ver con los triángulos isósceles.
886. Lo mismo para un hexágono. ¿Cuál ha sido en este caso la propiedad de triángulos y lugares geométricos que has empleado? Nota: tiene que ver con los triángulos equiláteros.

#### PROBLEMAS TOPOGRÁFICOS

887. Dos amigos, separados por 50m, ven la copa de un árbol, que se encuentra en algún lugar en medio de ellos, con un ángulo sobre la horizontal de  $30^\circ$  y  $40^\circ$ , respectivamente. Halla la altura del árbol y la distancia que hay entre cada amigo y la base del árbol.
888. El catastro nos ha dado el plano de una parcela en forma de rombo con solo dos datos: uno de los ángulos interiores de  $70^\circ$ ; la diagonal opuesta a ese ángulo de 500m. Resuelve la figura. Calcula la superficie edificable de la parcela si, según normativa, debe ser un 40% de la superficie total.
889. Halla la altura de un montículo sabiendo que un observador ve la cima con un ángulo de  $15^\circ$  (lo ha medido con un teodolito) sobre la horizontal y que, además, desde su posición, un láser certifica que está a 2km exactos de esa misma cima.
890. Estando situado a 100m de un árbol, veo su copa bajo un ángulo de  $30^\circ$ . Mi amigo está más cerca de él y lo ve bajo un ángulo de  $60^\circ$ . ¿A qué distancia está mi amigo del árbol?
891. Una escalera de bomberos está apoyada sobre la fachada de un edificio. La escalera mide 20 metros de longitud, y el ángulo que forma la escalera con el suelo es de  $30^\circ$ . Calcula a qué altura llegará la

escalera en la fachada de la casa. ¿A qué distancia del edificio está la base de la escalera?

892. Un avión vuela en un momento determinado entre dos ciudades A y B que distan 7 Km. Desde estas ciudades, el avión se observa bajo un ángulo con la horizontal A-B de  $45^\circ$  y  $30^\circ$  respectivamente. ¿A qué altura está el avión? Si una persona se encuentra en la vertical del avión, ¿a qué distancia se encuentra de cada ciudad?
893. En la playa de Oliva se ve una cometa volando amarrada a las boyas B1 y B2 que distan 112m. Desde la boya B1 se ve la cometa con un ángulo de  $40^\circ$  sobre la horizontal B1-B2; desde B2 la cometa se ve con  $120^\circ$ . ¿A qué altura sobre el mar está la cometa? ¿Cuánto mide la cuerda que sujeta la cometa a la boya B1?
894. ¿A qué altura está un globo amarrado al suelo con dos cabos de 6m si forman un ángulo de  $120^\circ$  entre ellos?
895. Esperando en la cola de las entradas de un Real Madrid-Tomelloso, veo la cornisa del estadio del Tomelloso con  $40^\circ$  sobre la horizontal; si retrocedo 20m en la cola, veo ahora la cornisa con  $28^\circ$ . ¿Qué altura tiene el estadio? ¿A qué distancia estoy de la ventanilla?
896. Sentada en el banco de un parque veo el tejado de un edificio aledaño con un ángulo de  $50^\circ$ . Si retrocedo 9 metros, lo veo ahora con un ángulo de  $15^\circ$ . Calcula la altura del edificio.
897. ¿Cuál es la altura de un faro si, estando a una distancia que no se conoce lo vemos con un ángulo de  $35^\circ$  desde la horizontal y si nos separamos 30m más se ve con un ángulo de  $20^\circ$ ?
898. Sigue estas instrucciones para dibujar el **arco capaz** del ángulo de  $30^\circ$  (lo aprendiste en 3º de ESO): traza el segmento AB de 10cm; desde el extremo A dibuja un ángulo de  $60^\circ$  ( $= 90^\circ - 30^\circ$ ); traza la mediatriz del segmento AB; señala el punto de corte O de la mediatriz con el lado del ángulo de  $60^\circ$ ; traza el arco de circunferencia con centro en O, radio OA y cuerda AB. ¿Qué propiedad geométrica tiene? Halla la medida del radio OA.



899. La punta de la veleta colocada sobre el tejado de un edificio proyecta una sombra de 60m. El sol, en esos momentos, forma un ángulo de  $43^\circ$  con la horizontal. a) ¿Cuánto mide el edificio si sabemos que la veleta tiene una altura de 70cm? b) ¿Qué ángulo hace el sol con la vertical? c) ¿Cuánto mediría una cuerda atada a la base de la veleta y al final de la sombra de 60m?

900. Sentada en la puerta de mi oficina veo la torre de la iglesia con un ángulo de  $40^\circ$  (desde la horizontal). Sin embargo, el conserje del ayuntamiento la ve con un ángulo de  $80^\circ$  (desde la horizontal). Si el ayuntamiento está a 20m de la iglesia, a) ¿a qué distancia está mi oficina de la iglesia? b) ¿Cuánto mide la torre? c) ¿Con qué ángulos nos vería el monaguillo al conserje y a mí si se asomara desde lo más alto del campanario?

### POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS CON TRIGONOMETRÍA

#### RECUERDA DE 1º ESO

POLÍGONOS		
POLÍGONO	CARACTERÍSTICAS	ÁREA o SUPERFICIE
TRIÁNGULOS	El triángulo es el polígono de tres lados. Existen dos clasificaciones. Según sus lados: equilátero (tres lados iguales), isósceles (dos lados iguales y uno desigual) y escaleno (tres lados distintos). Según sus ángulos: acutángulo (los tres ángulos agudos), rectángulo (un ángulo recto) y obtusángulo (un ángulo obtuso). El equilátero es el triángulo regular (lados iguales y ángulos de $60^\circ$ ).	FÓRMULA DE LA ALTURA $\Rightarrow \text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$ FÓRMULA DE HERÓN $\Rightarrow \text{Área} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ siendo $s$ el semiperímetro $\equiv s = \frac{\text{Perímetro}}{2} = \frac{a+b+c}{2}$
CUADRILÁTEROS	CUADRADOS	El cuadrado es el cuadrilátero regular $\Rightarrow$ tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales a $90^\circ$ . $\text{Área} = \text{Lado}^2 = l^2$
	ROMBOS	El rombo no es regular porque si bien tiene todos sus lados iguales, sus ángulos son distintos (aunque sí son iguales por parejas, dos agudos y dos obtusos). $\text{Área} = \frac{\text{Diagonal}_{\text{Mayor}} \cdot \text{Diagonal}_{\text{Menor}}}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$
	RECTÁNGULOS	El rectángulo es el cuadrilátero con todos los ángulos iguales a $90^\circ$ y los lados iguales por parejas. $\text{Área} = \text{Lado}_{\text{grande}} \cdot \text{Lado}_{\text{pequeño}} = a \cdot b$
	ROMBOIDES	El romboide es el cuadrilátero con los ángulos iguales por parejas (dos agudos y dos obtusos) y los lados iguales por parejas. $\text{Área} = \text{Base} \cdot \text{Altura} = b \cdot h$
	TRAPECIOS	Los trapecios son cuadriláteros con dos lados paralelos. Dependiendo de las características de los otros dos lados, distinguimos tres tipos de trapecios: trapecios rectángulos (cuando uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases), trapecios isósceles (cuando los dos lados no paralelos son iguales) y trapecios escalenos (cuando los dos lados no paralelos son desiguales). $\text{Área} = \frac{(\text{Base}_{\text{Mayor}} + \text{Base}_{\text{Menor}}) \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$
POLÍGONOS REGULARES (n lados)	Un polígono es regular cuando todos sus lados y todos sus ángulos son iguales. Los polígonos regulares tienen un punto (centro del polígono) desde donde se trazan sus apotemas (rectas en perpendicular a los lados).	$\text{Área} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$
POLÍGONOS NO REGULARES	POR TRIANGULACIÓN $\Rightarrow$ se descompone la figura de n lados en $n-1$ triángulos y se calculan las áreas parciales con HERÓN.	

#### RECUERDA DE 2º Y 3º ESO

POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS		
FIGURA 3D	ÁREA	VOLUMEN
PRISMAS	PRISMAS: $A_{\text{Total}} = A_{\text{Lateral}} + 2 \cdot A_{\text{Base}}$	$V = \text{Área}_{\text{base}} \cdot \text{Altura}_{\text{prisma}}$
	CUBOS: $A_{\text{Total}} = 6 \cdot A_{\text{Base}} = 6 \cdot \text{lado}^2 = 6 \cdot l^2$	$V = \text{lado}^3 = l^3$
	ORTOEDROS: $A_{\text{Total}} = A_{\text{Lateral}} + 2 \cdot A_{\text{Base}}$	$V = \text{lado} \cdot \text{lado} \cdot \text{lado} = a \cdot b \cdot c$
PIRÁMIDES	$A_{\text{Total}} = A_{\text{Lateral}} + A_{\text{Base}}$	$V = \frac{\text{Área}_{\text{base}} \cdot \text{Altura}_{\text{pirámide}}}{3}$
CILINDROS	$A_{\text{Total}} = A_{\text{Lateral}} + 2 \cdot A_{\text{Base}} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (h + r)$	$V = \text{Área}_{\text{base}} \cdot \text{Altura}_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h$
CONOS	$A_{\text{Total}} = A_{\text{Lateral}} + A_{\text{Base}} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r \cdot (g + r)$	$V = \frac{\text{Área}_{\text{base}} \cdot \text{Altura}_{\text{cono}}}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$
ESFERAS	$A = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$
TRONCOS PIRÁMIDE REGULAR	$A = \frac{\text{Perímetro}_{\text{base}} + \text{Perímetro}_{\text{base}'}}{2} \cdot \text{Altura}_{\text{caras}} + A_{\text{base}} + A_{\text{base}'}$	$V = \frac{h_{\text{tronco}} \cdot (A_{\text{base}} + A_{\text{base}'} + \sqrt{A_{\text{base}} \cdot A_{\text{base}'}})}{3}$
TRONCOS CONO RECTOS	$A_{\text{Total}} = \pi \cdot [g \cdot (R + r) + R^2 + r^2]$	$V = \frac{\pi \cdot h_{\text{tronco}} \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)}{3}$
CASQUETES POLARES	$A = 2 \cdot \pi \cdot \text{Radio}_{\text{esfera}} \cdot \text{Altura}_{\text{casquete}} = 2\pi R h$	$R = \frac{(\text{radio}_{\text{casquete}})^2 + h^2}{2h} = \frac{r^2 + h^2}{2h}$ $V = \frac{\pi h^2 \cdot (3R - h)}{3}$
ZONAS ESFÉRICAS	$A = 2 \cdot \pi \cdot \text{Radio}_{\text{esfera}} \cdot \text{Altura}_{\text{zona}} = 2\pi R h$	$V = \frac{\pi h \cdot (h^2 + 3R^2 + 3r^2)}{6}$

**Nota:** no puedes usar la fórmula de Herón para calcular las áreas de los triángulos que aparezcan (en este nivel de dificultad se quiere que emplees trigonometría para calcular las alturas necesarias).

#### Prismas

901. En un prisma triangular recto de arista lateral 21cm y lados de la base 6cm, 10cm, 13cm, se pide calcular el área total y el volumen.
902. Halla el volumen de un prisma triangular regular oblicuo de arista de la base 8cm, arista de las caras 19cm y ángulo de esta con la base de  $75^\circ$ .
903. Halla el volumen de un prisma triangular regular oblicuo de arista de la base 6cm, arista de las caras 14cm y ángulo de esta con la base de  $33^\circ$ .





904. En un prisma triangular recto de arista lateral 14cm y lados de la base 4cm, 6cm, 9cm, se pide calcular el área total y el volumen.

#### Pirámides

905. Halla el área y el volumen de una pirámide cuadrangular regular de arista lateral 25cm y ángulo desigual en caras (triangulares)  $20^\circ$ .
906. Halla el área y el volumen de una pirámide cuadrangular regular de arista lateral 31cm y ángulo desigual en caras (triangulares)  $36^\circ$ .

#### Cilindros

907. La generatriz de un cilindro oblicuo mide 15cm y forma un ángulo de  $55^\circ$  con el radio de la base. Halla el área total y el volumen del cilindro.
908. La generatriz de un cilindro oblicuo mide 26cm y forma un ángulo de  $60^\circ$  con el radio de la base. Halla el área total y el volumen del cilindro.
909. El diámetro de la base de un cilindro oblicuo mide 10cm y forma un ángulo de  $40^\circ$  con la generatriz. Halla el área total y el volumen del cilindro.

#### Conos

910. La generatriz de un cono recto mide 12cm y forma un ángulo de  $55^\circ$  con el radio de la base. Halla el área total y el volumen del cono.
911. El diámetro de la base de un cono recto mide 8cm y forma un ángulo de  $25^\circ$  con la generatriz. Halla el área total y el volumen del cono.

#### Esferas (distancias en el globo con independencia de paralelos)

RECUERDA (ángulo en radianes)  $\Rightarrow$  arco = ángulo  $\cdot$  radio

912. En una esfera de radio 50cm. ¿A qué **distancia** (en línea recta, por el interior de la esfera) se encuentran dos puntos cuyos radios forman un ángulo de  $30^\circ$ ? ¿Qué arco de circunferencia hay entre ellos? ¿Qué área y volumen tiene la esfera?

913. En una esfera de radio 26cm. ¿Qué **ángulo** deberían formar los radios de dos puntos separados 12cm (en línea recta, por el interior de la esfera)? ¿Qué arco de circunferencia hay entre ellos? ¿Qué área y volumen tiene la esfera?

914. Dos puntos de una esfera se encuentran en los extremos de un arco de 64cm. Sabiendo que sus radios forman un ángulo de  $120^\circ$ , ¿cuánto mide el **radio** de la esfera? ¿Cuáles son su área y su volumen? ¿Qué distancia (en línea recta, por el interior de la esfera) separa a los puntos?

915. En una esfera de diámetro 38cm. ¿A qué **distancia** (en línea recta, por el interior de la esfera) se encuentran dos puntos cuyos radios forman un ángulo de  $100^\circ$ ? ¿Qué arco de circunferencia hay entre ellos? ¿Qué área y volumen tiene la esfera?

916. En una esfera de diámetro 30cm. ¿Qué **ángulo** deberían formar los radios de dos puntos separados 19cm (en línea recta, por el interior de la esfera)? ¿Qué arco de circunferencia hay entre ellos? ¿Qué área y volumen tiene la esfera?

917. Dos puntos de una esfera se encuentran en los extremos de un arco de 72cm. Sabiendo que sus radios forman un ángulo de  $150^\circ$ , ¿cuánto mide el **radio** de la esfera? ¿Cuáles son su área y su volumen? ¿Qué distancia (en línea recta, por el interior de la esfera) separa a los puntos?

918. En una esfera de radio 62cm. ¿A qué **distancia** (en línea recta, por el interior de la esfera) se encuentran dos puntos cuyos radios forman un ángulo de  $75^\circ$ ? ¿Qué arco de circunferencia hay entre ellos? ¿Qué área y volumen tiene la esfera?

919. En una esfera de radio 56cm. ¿Qué **ángulo** deberían formar los radios de dos puntos separados 94cm (en línea recta, por el interior de la esfera)? ¿Qué arco de circunferencia hay entre ellos? ¿Qué área y volumen tiene la esfera?

920. Dos puntos de una esfera se encuentran en los extremos de un arco de 16cm. Sabiendo que sus radios forman un ángulo de  $60^\circ$ , ¿cuánto mide el **radio** de la esfera? ¿Cuáles son su área y su volumen?



¿Qué distancia (en línea recta, por el interior de la esfera) separa a los puntos?

921. En una esfera de diámetro 45cm. ¿A qué **distancia** (en línea recta, por el interior de la esfera) se encuentran dos puntos cuyos radios forman un ángulo de  $230^\circ$ ? ¿Qué arco de circunferencia hay entre ellos? ¿Qué área y volumen tiene la esfera?
922. Dos puntos de una esfera se encuentran en los extremos de un arco de 18cm. Sabiendo que sus radios forman un ángulo de  $45^\circ$ , ¿cuánto mide el **radio** de la esfera? ¿Cuáles son su área y su volumen? ¿Qué distancia (en línea recta, por el interior de la esfera) separa a los puntos?

#### Troncos

923. Si el radio mayor de un **tronco de cono recto** mide 10cm y el radio menor 5cm, calcula el volumen del cono que lo contiene sabiendo que el ángulo que forma su generatriz con las bases es de  $45^\circ$ .
924. Si el lado de la base mayor de un **tronco de pirámide cuadrangular regular** mide 9cm y el lado de la base menor 6cm, calcula el volumen de la pirámide que lo contiene sabiendo que el ángulo que forma sus laterales con las bases es de  $60^\circ$ .
925. Si el radio mayor de un **tronco de cono recto** mide 16cm y el radio menor 7cm, calcula el área y el volumen del tronco sabiendo que el ángulo que forma su generatriz con las bases es de  $30^\circ$ .
926. Si el lado de la base mayor de un **tronco de pirámide triangular regular** mide 12cm y el lado de la base menor 8cm, calcula el volumen de la pirámide que lo contiene sabiendo que el ángulo que forma sus laterales con las bases es de  $40^\circ$ . Nota: necesitarás acudir a las propiedades de los puntos notables del triángulo.
927. Si el radio mayor de un **tronco de cono recto** mide 16cm y el radio menor 7cm, calcula el volumen del cono que lo contiene sabiendo que el ángulo que forma su generatriz con las bases es de  $65^\circ$ .

928. Si el lado de la base mayor de un **tronco de pirámide hexagonal regular** mide 8cm y el lado de la base menor 6cm, calcula el área y volumen del tronco que lo contiene sabiendo que el ángulo que forman los laterales con las bases es de  $35^\circ$ .

#### COORDENADAS POLARES

**INTRODUCCIÓN.** Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Qué matemáticas comparten el oído, las tiendas de bricolaje y el filósofo Descartes?



Coordenadas cartesianas  $A(x, y)$   $\Leftrightarrow$  Coordenadas polares  $A(\rho, \alpha)$

$$A \text{ en cartesianas } \begin{cases} x = \rho \cdot \cos \alpha \\ y = \rho \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad A \text{ en polares } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$\rho$  se llama RADIO VECTOR (MÓDULO del vector  $\overrightarrow{OA}$ )  
 $\alpha$  se llama ARGUMENTO (no es único, hay que sumar  $360^\circ \cdot k$  o  $2k\pi$  rad)



929. Pasa a polares las siguientes coordenadas cartesianas correspondientes a los siguientes puntos:  $P(1, 1)$ ;  $Q(-3, 5)$ ;  $R(2, -7)$ ;  $S(0, 1)$ ;  $T(-1, 1)$ ;  $N(-1, 0)$ . Nota: no te olvides de sumar  $360^\circ \cdot k$  al argumento (o  $2k\pi$  si trabajas en radianes).

930. Pasa las coordenadas cartesianas del punto  $P(5, 2)$  a coordenadas polares. Pasa las coordenadas polares del punto  $Q(7, 20^\circ)$  a coordenadas cartesianas. Dibuja ambos.

**Vértices de polígonos regulares centrados en el origen (POLO):**

931. Da las coordenadas en cartesianas y polares de los vértices de un cuadrado de lado 4cm centrado en el origen  $(0, 0)$ . Nota: te resultará más fácil si empiezas por las coordenadas cartesianas.

932. Da las coordenadas cartesianas y polares de los vértices de un hexágono regular centrado en  $(0, 0)$  con lado 5cm. Nota: recuerda que en un hexágono regular el lado es igual al radio de la circunferencia circunscrita; te resultará más fácil empezar por las coordenadas polares.

933. Da las coordenadas cartesianas y polares de los vértices de un pentágono regular centrado en  $(0, 0)$  con radio de la circunferencia circunscrita 4cm. Nota: te resultará más fácil empezar por las coordenadas polares. ¿Cuánto mide el lado?

934. Da las coordenadas cartesianas y polares de los vértices de un triángulo equilátero centrado en  $(0, 0)$  con lado 6cms. Nota: usa una de las propiedades de los puntos notables de este triángulo para

averiguar el radio de la circunferencia circunscrita; te resultará más fácil empezar por las coordenadas polares. ¿Qué área tiene?

935. Se quiere dibujar el octógono regular centrado en  $(0, 0)$  cuyo primer vértice se encuentra en el punto de coordenadas  $A(7, 0)$ . Da el resto de vértices en coordenadas tanto polares como cartesianas. Nota: date cuenta de que las coordenadas de A son las mismas en cartesianas y en polares  $A(7, 0^\circ + 360^\circ \cdot k)$ .

936. Se quiere dibujar el triángulo equilátero centrado en  $(0, 0)$  cuyo primer vértice se encuentra en el punto de coordenadas cartesianas  $A(-4, 0)$ . Da todos los vértices en coordenadas tanto polares como cartesianas.

937. Se quiere dibujar el triángulo equilátero centrado en  $(0, 0)$  cuyo primer vértice se encuentra en el punto de coordenadas cartesianas  $A(3, 4)$ . ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita? Da las coordenadas de los vértices tanto en polares como en cartesianas.

### RECTA-PENDIENTE

Dentro de la web [www.estenmaticas.es](http://www.estenmaticas.es), entra en la sección de LA PREGUNTA MATEMÁTICA y busca => ¿Qué tienen en común las placas fotovoltaicas, las vueltas ciclistas y los zapatos de tacón?



### RECUERDA

Recta en cartesianas:  $y = mx + n$

Usando trigonometría, sabemos que la pendiente  $m = \tan \alpha$  entonces  $y = x \cdot \tan \alpha + n$



### Cartesianas:

938. Da la ecuación de la recta (en cartesianas) que pasa por el punto  $(5, -3)$  y está inclinada un ángulo de  $45^\circ$  sobre la horizontal. Dibújala.
939. Da la ecuación de la recta (en cartesianas) que pasa por el punto  $(5, -3)$  y está inclinada un ángulo de  $135^\circ$  sobre la horizontal. Dibújala.
940. Da la ecuación de la recta (en cartesianas) que pasa por el punto  $(-1, -1)$  y está inclinada un ángulo de  $30^\circ$  sobre la horizontal. Dibújala.
941. Da la ecuación de la recta (en cartesianas) que pasa por el punto  $(-2, 0)$  y está inclinada un ángulo de  $120^\circ$  sobre la horizontal. Dibújala.
942. ¿Cuánto está inclinada sobre la horizontal la recta de ecuación  $y = -4x + 1$ ? Dibújala.
943. ¿Cuánto está inclinada sobre la horizontal la recta de ecuación  $y = -x/2$ ? Dibújala.
944. ¿Cuánto está inclinada sobre la horizontal la recta de ecuación  $y = 3x - 3$ ? Dibújala.
945. ¿Cuánto está inclinada sobre la horizontal la recta de ecuación  $y = -x - 5$ ? Dibújala.

### RECUERDA

Si la recta pasa por el origen de coordenadas  $(0, 0)$ , la  $n=0$  resultando la ecuación en cartesianas  $y = mx$

946. Escribe en coordenadas cartesianas (forma explícita  $y = mx$ ) la ecuación de la recta que en polares es  $\alpha = 3\pi$ .
947. Escribe en coordenadas cartesianas (forma explícita  $y = mx$ ) la ecuación de la recta que en polares es  $\alpha = \pi$ .
948. Escribe en coordenadas cartesianas (forma explícita  $y = mx$ ) la ecuación de la recta que en polares es  $\alpha = \pi/4$ .
949. Escribe en coordenadas cartesianas (forma explícita  $y = mx$ ) la ecuación de la recta que en polares es  $\alpha = \pi/2$ .

950. Escribe en coordenadas cartesianas (forma explícita  $y = mx$ ) la ecuación de la recta que en polares es  $\alpha = 3\pi/4$ .
951. Escribe en coordenadas cartesianas (forma explícita  $y = mx$ ) la ecuación de la recta que en polares es  $\alpha = 2\pi/3$ .



### RECUERDA

Recta que pasa por el origen (polo) en polares (siendo  $m$  la pendiente):  
 $\alpha = \text{artg } m$

### Polares:

952. Escribe en polares la ecuación de la recta que pasa por el origen y por  $A(5, 2)$ . Dibújala. Escríbela también en cartesianas. Da las coordenadas, tanto en polares como en cartesianas, de un punto de esta recta (cualquiera, elige uno distinto de  $A$ ). ¿A qué distancia está de  $A$  ese nuevo punto?
953. Escribe en polares la ecuación de la recta que pasa por el origen y por  $A(-3, 4)$ . Dibújala. Escríbela también en cartesianas. Da las coordenadas, tanto en polares como en cartesianas, de los dos puntos de esta recta que están a 5 unidades de  $A$ . ¿A qué distancia están uno del otro esos dos nuevos puntos?
954. Escribe en polares la ecuación de la recta que pasa por el origen y por  $A(-1, -3)$ . Dibújala. Escríbela también en cartesianas. Da las coordenadas, tanto en polares como en cartesianas, de tres puntos de esta recta (cualquiera, elígelos distintos de  $A$ ). ¿A qué distancia están de  $A$  cada uno de esos tres nuevos puntos?



955. Escribe en polares la ecuación de la recta que pasa por el origen y por A(5, 2). Dibújala. Escríbela también en cartesianas. Da las coordeandas, tanto en polares como en cartesianas, de los dos puntos de esta recta que están a 3 unidades de A. ¿A qué distancia están del polo estos dos nuevos puntos?

956. Escribe en polares la ecuación de la recta que pasa por el origen y por A(-4, 1). Dibújala. Escríbela también en cartesianas. Da las coordeandas de un punto de esta recta (cualquiera, elige uno distinto de A) tanto en polares como en cartesianas.

#### CIRCUNFERENCIA

La ecuación en coordenadas polares correspondiente a un circunferencia centrada en (0, 0) y de radio R es  $\rho = R$

Recuerda que en coordenadas cartesianas es  $x^2 + y^2 = R^2$

957. Escribe en polares la ecuación de la circunferencia centrada en el origen y de radio 4 unidades. Da las coordeandas, tanto en polares como en cartesianas, de tres puntos de esta circunferencia (cualesquiera, elígelos tú). Elige dos de ellos y, usando trigonometría, calcula la distancia que hay entre ellos.

958. Escribe en polares la ecuación de la circunferencia centrada en el origen y que pasa por el punto A(4, 5). Da las coordeandas, tanto en polares como en cartesianas, de los dos puntos dentro de esta circunferencia que están a 60° de A. ¿Qué distancia hay entre ellos?

959. Escribe en polares la ecuación de la circunferencia centrada en el polo y de diámetro 7 unidades. Da las coordeandas, tanto en

polares como en cartesianas, de dos puntos diametralmente opuestos dentro de esta circunferencia (cualesquiera, elígelos tú). ¿Qué distancia hay entre ellos?

960. Escribe en polares la ecuación de la circunferencia centrada en el origen y que pasa por el punto B(-6, 3). Da las coordeandas, tanto en polares como en cartesianas, de los dos puntos dentro de esta circunferencia que están a 80° de B. ¿Qué distancia hay entre ellos?

961. Escribe en polares la ecuación de la circunferencia centrada en el origen y de longitud  $12\pi$  unidades. Da las coordeandas, tanto en polares como en cartesianas, de dos puntos separados un cuarto de vuelta dentro de esta circunferencia (cualesquiera, elígelos tú). Calcula la distancia que hay entre ellos.

962. Escribe en polares la ecuación de la circunferencia centrada en el polo y de área  $9\pi$  unidades cuadradas. Da las coordeandas, tanto en polares como en cartesianas, de tres puntos equidistantes de esta circunferencia (cualesquiera, elígelos tú). Elige dos de ellos y calcula la distancia que hay entre ellos.

963. Escribe en polares la ecuación de la circunferencia centrada en el origen y de longitud  $14\pi$  unidades. Da las coordeandas, tanto en polares como en cartesianas, de cuatro puntos equidistantes dentro de esta circunferencia (cualesquiera, elígelos tú). ¿Qué distancia hay entre ellos?